নিমিখ পানে

ক্যালকুলাসের পথ পরিভ্রমণ

চমক হাসান

আমাদের দেশে ক্যালকুলাস শেখানো হয় উচ্চমাধ্যমিক পর্যায়ে। কিন্তু সেখানে মূল বিষয়টা আসলে কী বোঝাচ্ছে, সেটা থেকে বেশি থাকে কী কৌশলে অঙ্ক করতে হয়।

অবশ্যই কৌশল শেখার গুরুত্ব আছে। কিন্তু একটা কৌশল কেন তৈরি হলো, কোথায় ব্যবহার হবে, এগুলো না জেনে শুধু কৌশল জানলে সেটা অনেকটাই অর্থহীন হয়ে যায়। তার চেয়েও বড় হলো অন্ধের মতো শুধুই কৌশল জানতে থাকলে সৃজনশীল মনও একসময় চিন্তাশূন্য হয়ে পড়ে।

এই বইয়ে চেষ্টা করা হয়েছে সেই অভাবটুকু পূরণের, যেন ক্যালকুলাস নিয়ে চিন্তার আনন্দটুকু মানুষ উপভোগ করতে পারে।

ISBN: 978-984-8040-29-4

www.adarshapublications.com

নিমিখ পানে

ক্যালকুলাসের পথ পরিভ্রমণ

চমক হাসান

আদর্শ

প্রকাশক: আদর্শ

প্রধান বিক্রয়কেন্দ্র: আদর্শ বই

৩৮ পি. কে. রায় রোড, বাংলাবাজার (২য় তলা), ঢাকা ১১০০

+০২-৯৬১২৮৭৭, ০১৭৯৩২৯৬২০২, ০১৭১০৭৭৯০৫০

info@adarshapublications.com www.adarshapublications.com

নিমিখ পানে: ক্যালকুলাসের পথ পরিভ্রমণ

১ম প্রকাশ: ৯ ফাল্গুন ১৪২৫; ২১ ফেব্রুয়ারি ২০১৯

প্রচ্ছদ: চমক হাসান

মুদ্রণ ব্যবস্থাপনা: আদর্শ প্রিন্টার্স

আদর্শর বই অনলাইনে কেনার লিংক: www.rokomari.com/adarsha

মূল্য: বাংলাদেশে ৪০০ টাকা

Nimikh Pane: Calculaser Path Paribhramon (Published in Bengali)

by *Chamok Hasan*

Published by Adarsha

Sales Center: Adarsha Boi

38 P. K. Ray Road, Banglabazar (1st floor), Dhaka 1100

ISBN: 978-984-8040-29-4

উৎসর্গ

ছোট বোন চারুকে

চমক হাসানের প্রকাশিত অন্য বইসমূহ

গণিতের রঙ্গে: হাসিখুশি গণিত

অঙ্ক ভাইয়া

গল্পে-জল্পে জেনেটিক্স (২ খণ্ড)

সূচি

লেখকের কথা

ক্যালকুলাস বা কলনবিদ্যা গণিতের সবচেয়ে নতুন বিষয়গুলোর একটি। পরিবর্তনশীল রাশিগুলোকে বোঝার জন্য এর থেকে চমৎকার গণিত আর হতেই পারে না। পরিবর্তনশীল রাশি কোথায় নেই? গণিত নিয়ে আরও জানতে চাও? পদার্থবিজ্ঞান? রসায়ন? জীববিজ্ঞান? অর্থনীতি? সব জায়গায় দেখবে নানান রকম রাশি—যেগুলো বদলে যাচ্ছে প্রতিনিয়ত। আর সেসব হিসাবের জন্য দরকার পড়ে ক্যালকুলাস।

কেন একটা কোল্ড ড্রিংকসের ক্যান দেখতে সিলিন্ডার আকৃতির? সে হিসেব করতে লাগবে ক্যালকুলাস। নদীতে পানির প্রবাহ নিয়ে ভাবতে চাও, প্রচণ্ড ঝড় কোথায় এসে আঘাত হানবে তার অনুমান করতে চাও, সূর্যোদয়, সূর্যাস্তের সময় কিংবা গ্রহ-নক্ষত্রের কক্ষপথের নিখুঁত হিসাব করতে চাও? লাগবে ক্যালকুলাস। অর্থনীতির বহু হিসাব-নিকেশেও প্রয়োজন ক্যালকুলাস। আমাদের নিত্যনৈমিত্তিক জীবনে প্রতিনিয়ত ক্যালকুলাস করতে হয় না। কিন্তু আমাদের জীবনের বহু উপাদান অসম্ভব ছিল যদি ক্যালকুলাস তৈরি না হতো। ঘরবাড়ি তৈরি, মোবাইল ফোনে কথা বলা—কম্পিউটারে প্রোগ্রামিং করা, গান শোনা কিংবা ভিডিও দেখা—সবকিছুর আড়ালে কাজ করছে ক্যালকুলাস।

আমাদের দেশে ক্যালকুলাস শেখানো হয় উচ্চমাধ্যমিক পর্যায়ে। কিন্তু যা শেখানো হয় সেখানে মূল বিষয়টা আসলে কী বোঝাচ্ছে, সেটা থেকে বেশি থাকে কী কৌশলে অঙ্ক করতে হয়। অবশ্যই কৌশল শেখার গুরুত্ব আছে। কিন্তু একটা কৌশল কেন তৈরি হলো, কোথায় ব্যবহার হবে, এগুলো না জেনে শুধু কৌশল জানলে সেটা অনেকটাই অর্থহীন হয়ে যায়। তার চেয়েও বড় হলো অন্ধের মতো শুধুই কৌশল জানতে থাকলে সৃজনশীল মনও একসময় চিন্তাশূন্য হয়ে পড়ে। অনেকেই অঙ্ক করার নিয়মগুলো খুব ভালো করে পারে, কিন্তু জানে না কেন কী করছে। অথচ উচ্চশিক্ষার জন্য ক্যালকুলাস সম্পর্কে ধারণা থাকাটা খুবই জরুরি!

এ বই থেকে আমি কী চাই, সেটা সম্পর্কে আমি পরিষ্কার! আমি চাই, যে মানুষটা উচ্চশিক্ষার জন্য বিশ্ববিদ্যালয়ে পড়বে, ওখানে পড়া শুরু করার আগে যতটুকু ক্যালকুলাস জানা দরকার সবটুকু যেন তার জানা থাকে। মূল ঘটনাটা যেন তার বোঝা থাকে। সম্প্রতি শ্রদ্ধেয় ড. মুহম্মদ জাফর ইকবাল 'সহজ ক্যালকুলাস' নামে একটি বই প্রকাশ করেছেন, যেখানে ক্যালকুলাসের ভেতরের ধারণাগুলোকে তিনি বোঝাতে চেয়েছেন। এটি একটি ছোট্ট সুন্দর বই, যেটাকে পাঠ্যবই পড়ার আগের ধাপ হিসেবে বিবেচনা করা যেতে পারে। আমার এই বইটি তার থেকে বড় পরিসরের। এই বইটিকে চাইলে বিকল্প একটি পাঠ্যবই হিসেবেও ব্যবহার করা যাবে। 'অল্প কথায় বলি', 'সোজা বাংলায় ভেঙে বলি' আর 'গণিতের ভাষায় বলি', আমি চেয়েছি সবগুলো ধারণাকে এই তিন ধাপে বোঝাতে। মাঝেমধ্যে সতর্ক করে দিয়েছি সেসব জায়গায়, যেখানে মানুষের ভেতরে দ্বিধাদ্বন্দ্ব তৈরির সুযোগ থাকবে। 'খুব খেয়াল', 'সতর্কীকরণ' এই নামগুলো সেখানে ব্যবহার করা হয়েছে।

কিছু মানুষের কাছে কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করতে চাই। প্রকাশক শেষ পর্যন্ত লেখার তাগিদ দিয়ে গেছেন। আমার মতো অলস এবং অগোছালো মানুষের জন্য এমন একজন প্রকাশক পাওয়া সৌভাগ্যের ব্যাপার। বইয়ের প্রচুর সমীকরণের কাজ একা টাইপ করে কুলাতে পারছিলাম না। তখন আমার

হাতে লেখা কিছু নোট এবং ভিডিও অনুলিখন করে সাহায্য করেছে সাহারা তিথি, আশরাফুজ্জামান তানভির, তৌসিক সিজান, নাফিজ হায়দার ও আফিয়া আফরিন। ওদের এই সহযোগিতা ছাড়া বইটা আলোর মুখ দেখত কি না, সন্দেহ। বইয়ের নামের 'নিমিখ' অংশটুকুর জন্য বন্ধু সাবিহ ওমরের কাছে কৃতজ্ঞতা। আর পুরো নামটা দিতে সহযোগিতা করেছে চিন্তাবিদ বন্ধু হিমালয়। এই বইটির কারণে সহমানুষ ফিরোজা বহ্নি এবং কন্যা বর্ণমালা আমার যে সময়টুকু পায়নি—সেই সময়ের ঋণ শুধু কৃতজ্ঞতায় শোধ হবে না কখনও, ভালোবাসা জানিয়ে রাখছি।

ক্যালকুলাসের বইটি দুই খণ্ডে প্রকাশ করা হবে। এই প্রথম খণ্ডে আমি ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস নিয়ে আলোচনা করব। তাহলে চলো ভ্রমণ করি—ক্যালকুলাসের অনিন্দ্যসুন্দর জগতে!

ড. চমক হাসান

ভ্যালেন্সিয়া, ক্যালিফোর্নিয়া, যুক্তরাষ্ট্র ডিসেম্বর, ২০১৮

১ ফেব্রুয়ারি ২০১৯

অধ্যায় ১

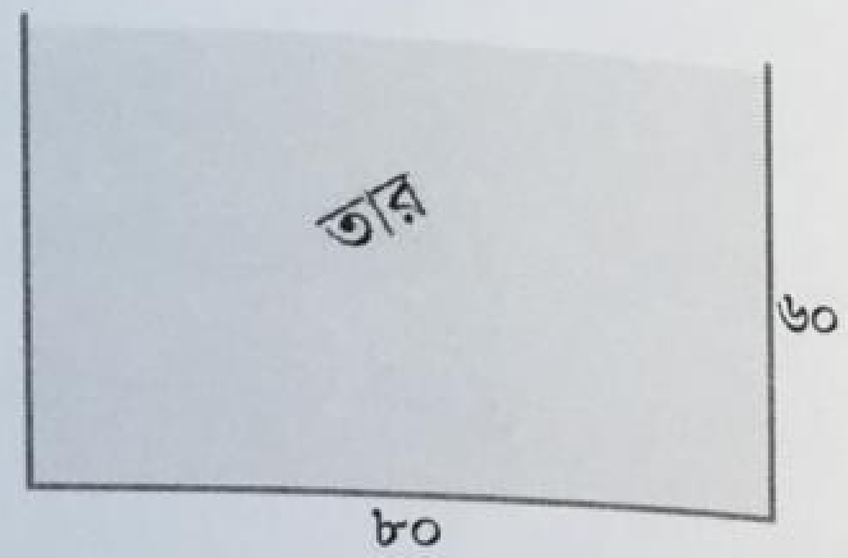
ক্যালকুলাসের শুরুর কথা

১.১ কেন ক্যালকুলাস

আমি মনে করি, গণিতে যেকোনো নতুন ব্যাপার শেখার সময়, 'এই ধারণাটা গণিতে কেন এল, কী করে এল?' এই প্রশ্নগুলো থাকা উচিত পাঠকের মাথায়। তাদের ভাবা উচিত, 'এই যে একটা ব্যাপার আমরা শিখছি, এটা কেন শিখছি? এটা না থাকলে কী ঝামেলা হচ্ছিল?' আমি জানি অনেক পাঠকই ভাবছে, 'হ্যাঁ, এই প্রশ্নটা আমার মাথায় ছিল তো! কিন্তু কেউ বলে দেয়নি!' কিংবা অনেকে হয়তো ভাবছে, 'আমি তো এটা শিক্ষককে জিজ্ঞেস করেছিলাম, ভালো উত্তর পাইনি।' তাদের আমি অভিনন্দন ও ভালোবাসা জানাতে চাই, অন্তত প্রশ্নটা তাদের মাথায় এসেছে, সেই জন্য।

চলো, একটা সমস্যার কথা বলি, সেটা সাধারণ গণিত দিয়ে সমাধান করা যায়। তারপর আমরা দেখব, ওই সমস্যাটাকে সামান্য বদলে দিলেই কী করে আর সাধারণ গণিত দিয়ে (ক্যালকুলাস ছাড়া) সেটাকে চিন্তা করা যায় না।

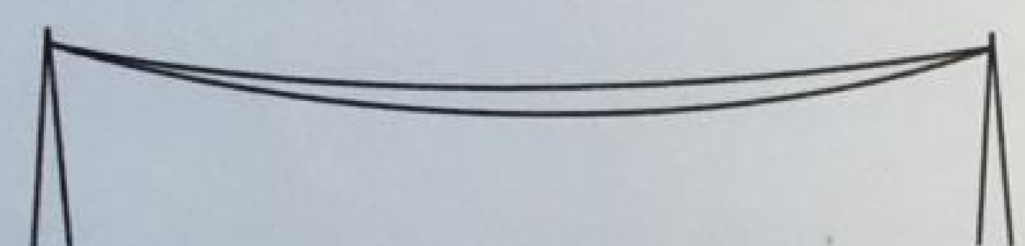
সমস্যা ১.১: টেলিফোনের তার কত লম্বা?



একটি আয়তাকার পুকুরের তলা দিয়ে কর্ণ বরাবর এ মাথা থেকে ও মাথা পর্যন্ত টেলিফোনের তার গেছে। পুকুরের দৈর্ঘ্য ৮০ গজ, প্রস্থ ৬০ গজ। তারের দৈর্ঘ্য কত?

পিথাগোরাসের উপাপাদ্য দিয়ে আমরা সহজেই হিসেব করতে পারি দৈর্ঘ্য= $\sqrt{80^2 + 60^2} = 100$।

সমস্যা ১.২: বিদ্যুতের তার কত লম্বা?



এবার ভাবো, দুটো বিদ্যুতের খুঁটির মাঝে ঝুলছে তার। তারটা নিজের ভারে বেঁকে একটা বক্ররেখার রূপ নিয়েছে। এই তারের দৈর্ঘ্য কত? এবার আর আমাদের চেনা কোনো গণিত দিয়ে ঠিক ঠিক হিসেব করা যাবে না। হয়তো কিছুটা অনুমান করতে পারব, তবে নিখুঁত হিসেবের জন্য লাগবে ক্যালকুলাস! এ ধরনের রেখাকে বলে শৃঙ্খলরেখা বা catenary।

ক্যালকুলাস, যাকে বাংলায় বলে কলনবিদ্যা, এটা হলো পরিবর্তনের গণিত। যে জিনিস প্রতিনিয়ত বদলে যাচ্ছে, সেই বদলটা কত দ্রুত ঘটছে কিংবা কত ধীরে, সেটা কখন চূড়ান্ত অবস্থায় পৌঁছাচ্ছে কিংবা এই ক্রমাগত পরিবর্তনের ফলাফলটা কেমন? ক্যালকুলাস কাজ করে সেই বিষয়গুলো নিয়ে। ক্যালকুলাসের দুইটা ভাগ—ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস ও ইন্টেগ্রাল ক্যালকুলাস।

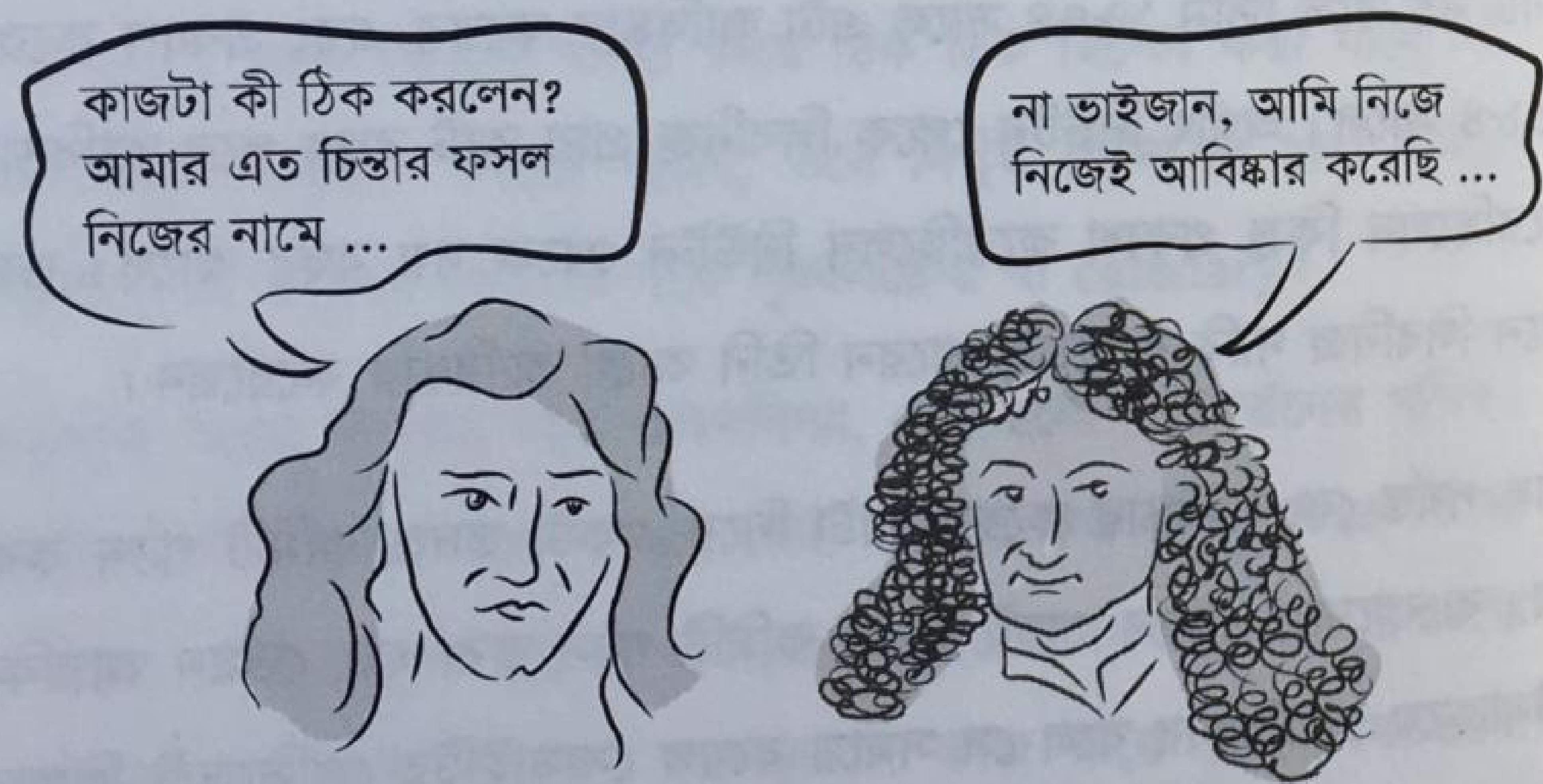
১.২ আবিষ্কারকের গোলযোগ

ক্যালকুলাসের নাম নিলেই যে দুজন মানুষের নাম সবার আগে আসে তাদের একজন হচ্ছেন মহামতি আইজ্যাক নিউটন এবং আরেকজন গটফ্রেড লিবনিজ। এদের দুজনকে নিয়ে অনেক মজার কথা আছে। ক্যালকুলাসের জনক হিসেবে দুজনকেই এখন মর্যাদা দেওয়া হয়। প্রথমে তাদের মধ্যে কে আগে সেটা আবিষ্কার করেছে তা নিয়ে বেশ বিবাদ-মনোমালিন্য হয়েছিল। এটা গণিতের ইতিহাসে সবচেয়ে বুখ্যাত কিংবা কুখ্যাত বিবাদগুলোর একটা।

নিউটন দাবি করেন যে তিনিই আগে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেছেন। নিউটনের নোট বই থেকে প্রমাণ পাওয়া যায় তিনি ১৬৬৬ সালে আবিষ্কার করেন। কিন্তু তিনি প্রকাশ করেছিলেন ১৬৯৩ সালে। এদিকে লিবনিজের নোট বই বলে তিনি ১৬৭৪ সালে এটা আবিষ্কার করেন এবং প্রকাশ করেন ১৬৮৪ সালে। অর্থাৎ নিউটন থেকে লিবনিজ প্রায় আট বছর পরে আবিষ্কার করেছিলেন কিন্তু প্রকাশ করেছিলেন নিউটন থেকে নয় বছর আগে। তার মানে লিবনিজ দাবি করতেই পারেন তিনি আগে আবিষ্কার করেছেন।

শেষ পর্যন্ত কে আবিষ্কার করেন, এটা নিয়ে একটা তদন্ত কমিটি গঠন করা হয়। বাংলাদেশে যেমন প্রায়ই তদন্ত কমিটি গঠন করা হয়, তেমন আরকি! ঘটনাক্রমে পদাধিকার বলে সে সময়ে রয়েল সোসাইটির প্রেসিডেন্ট ছিলেন নিউটন নিজেই! তদন্ত শেষ করে নিউটন নিজেই স্বাক্ষর করলেন রিপোর্টে 'জনাব নিউটনই মনে হইতেছে পূর্বে আবিষ্কার করিয়াছে'!! কী তামাশার ব্যাপার! যাহোক এখন আমরা দুজনকেই আবিষ্কারকের মর্যাদা দিই।

একটা ব্যাপার এখানে বলা দরকার। গণিত কিংবা বিজ্ঞানে আবিষ্কারক ধারণাটাই আমার কাছে বিভ্রান্তিকর মনে হয়। সত্যি বলতে কোনো একজন কিংবা দুজন মানুষ মিলে কখনই একটা বড় আবিষ্কার করে ফেলতে পারে না। ক্যালকুলাসেও তাই। প্রায় আড়াই হাজার বছর আগে 'মেথড অফ ইন্ডিভিসিবলস' এর ধারিণা দিয়ে গিয়েছিলেন ইউডক্সাস। তারপর মহান গণিতবিদ আর্কিমিডিস সেটার উপরে কাজ করে দারুণ সব সূত্র দেন জ্যামিতির। এই সব কিছুই আসলে ক্যালকুলাসের পূর্বসুরী। মাধবের 'যুক্তিভাষা' বইতে ক্যালকুলাসের ধারণা ছিল। দে কার্তের স্থানাংক জ্যামিতির ধারণা, ফার্মার মেথড অফ এডেকোয়ালিটি এগুলো না থাকলে নিউটন, লিবনিজের মাথায় ক্যালকুলাস জন্ম নিত কি না সন্দেহ। নিউটন এবং লিবনিজ যে ধারণা দিয়ে গিয়েছিলেন, ওখানেই থেমে থাকেনি ক্যালকুলাস। এরপর অয়লার, কশি, রাইমান, গাউসের মতো মহান গণিতবিদেরা এটাকে



স্যার আইজ্যাক নিউটন

উইলিয়াম গটফ্রেড লিবনিজ

করেছে আরও অনেক সমৃদ্ধ। অন্য অধ্যায়গুলোতে ধীরে ধীরে এসব গল্প একটু করে করা হবে।

১.৩ খাদকের সমস্যা এবং ডিফারেন্সিয়েশনের ধারণা

ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাসের কথা যদি বলি একটা সুন্দর উদাহরণ দেওয়া যায়। মনে করো তোমার একজন বন্ধু আছে, যে দারুণ ভোজনরসিক। বন্ধুদের ভেতরে এমন কিন্তু এক-দুজন থাকে!

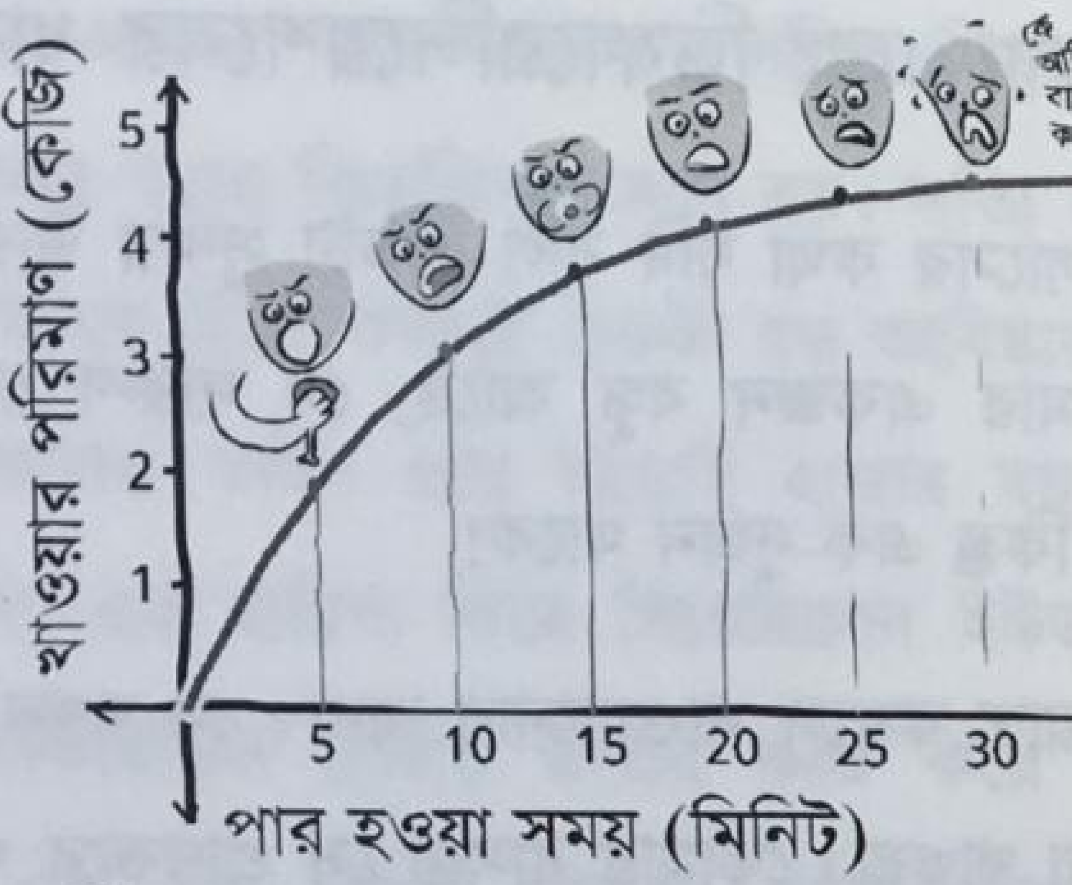
তো তাকে বাসায় দাওয়াত করলে খাওয়ানোর জন্য। সে যখন বাসায় এল, সে কিন্তু দুপুর থেকে না খাওয়া। তোমার বাসায় সে প্রাণভরে খাবে এ জন্য দুপুর থেকে না খাওয়া। অন্যদিকে তোমার মাথায় শয়তানি বুদ্ধি। তুমি চিন্তা করলে 'ব্যাটা তুমি এসেছ? তোমাকে আজকে মজা দেখাই।' তাকে তুমি বসিয়ে রেখেছেন। এক ঘণ্টা পার হয়ে গেল, ২ ঘণ্টা পার হয়ে গেল, ৩ ঘণ্টা পার হয়ে গেল! তখনো খেতে দিচ্ছ না। তখন প্রচণ্ড রাগে, ক্ষোভে, হতাশায়, দুঃখে, ক্ষুধায় তার অবস্থা খুবই খারাপ। পারলে তোমাকেই খেয়ে ফেলে। ঠিক তখন তুমি তার জীবনের যে প্রিয় খাদ্যগুলো তার চোখের সামনে এনে দিলে। এখন সে খাবে আর তার খাওয়ার গ্রাফ আঁকব আমরা!

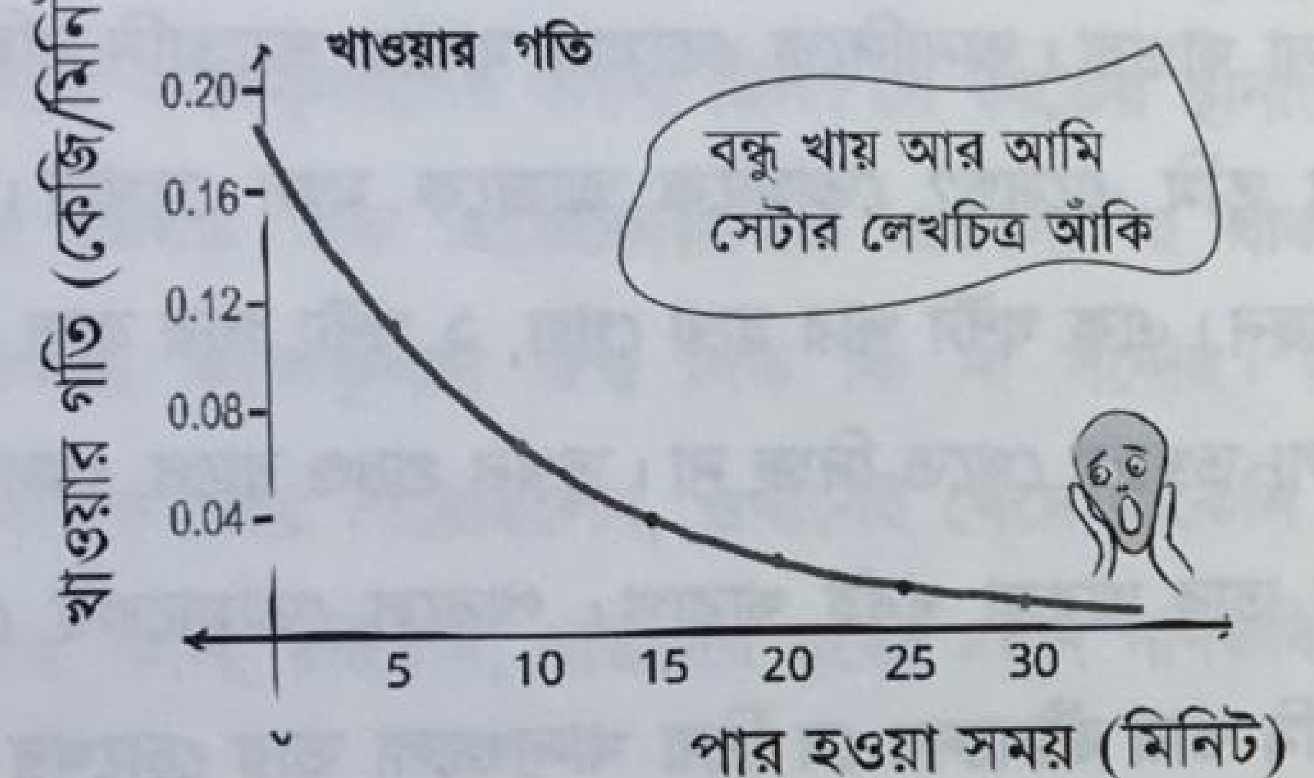
কীভাবে?

X অক্ষে আমরা দেখব সে কত মিনিট ধরে খাচ্ছে—৫ মিনিট, ১০ মিনিট, ১৫ মিনিট এভাবে ৩০ মিনিট । আর Y-অক্ষে থাকবে তার পেটে কত কেজি খাবার জমা হয়েছে, সেটা।

এ রকম গ্রাফ তুমি জীবনে দেখবে কি না, জানি না; তবে চলো আজকে দেখে আসি। ১ম ৫ মিনিটে তার খাওয়ার কথা ভাবি।

দেখা গেল, প্রথমে যখন খাচ্ছে তখন তার গতিই আলাদা! তার প্রচণ্ড উৎসাহ। ৫ মিনিটেই সে পুরো ২ কেজি খাবার খেয়ে ফেলল! তখন সেটা হতেই পারে।





তোমার কি মনে হয় তার পরের ৫ মিনিটে সে আরও ২ কেজি খেতে পারবে? মনে করো, তখন খেল আরও ১ কেজি। সব মিলিয়ে খাওয়া হলো ৩ কেজি। পরের ৫ মিনিটে দেখা গেল আরেকটু কম খেতে পেরেছে। প্রথমে সে যে উৎসাহ নিয়ে খাওয়া শুরু করেছিল, সেটা আর থাকবে না। এভাবে এখন এটা বাড়তে বাড়তে ৪ কেজিতে গিয়ে পৌঁছাল। তার খাওয়ার সর্বোচ্চ লিমিট ধরো তিন কেজি। এরপর তুমি তাকে যতই খেতে দাও সে আর খেতে পারবে না।

এটা হলো তার মোট খাবারের লেখচিত্র। এখন আমি যদি প্রশ্ন করি, আচ্ছা বলো তো, কখন তার খাবারের গতিটা সবচেয়ে বেশি ছিল? তুমি যদি খেয়াল করো, তাহলে দেখবে তার খাবারের গতি সবচেয়ে বেশি ছিল একেবারে

শুরুতে। শুরুতে সে প্রচণ্ড গতিতে খাচ্ছিল। এখন যদি তার খাবারের গতির একটা কার্ভ বা গ্রাফ আঁকাই তাহলে সেটা কেমন দেখাবে? প্রথমে তার খাবারের গতি অনেক বেশি।

শেষের দিকে তার খাবারের গতি একেবারে নিম্নমুখী। খেতে খেতে গতি একেবারে শূন্যের কোঠায় চলে গেল।

এখানে আমরা দুটো গ্রাফ দেখলাম। একটা হলো কী পরিমাণ খেলো তার কার্ভ আর আরেকটা হলো খাবারের গতির কার্ভ। এই যে, মোট কী পরিমাণ খেলো তা থেকে আমরা খাবারের গতির একটা কার্ভ বের করে ফেললাম, এরই মাঝে আসলে একটা দারুণ কাজ আমরা করে ফেললাম। ডিফারেনশিয়াল ক্যালকুলাস!

তুমি যদি পৃথিবীর শ্রেষ্ঠ গণিতবিদকে উপরের কার্ভ দেখিয়ে বলো, স্যার, এটা হলো আমার কার্ভ। এটাকে ডিফারেনশিয়েট করলে কী হবে তার একটি কার্ভ আঁকেন। উনিও এমন ধরনের একটা গ্রাফ তোমাকে এঁকে দেবেন।

এই যে কোনো একটা কার্ভ কত দ্রুত কিংবা কত ধীরে পরিবর্তিত হচ্ছে, সেটা বের করা, এ ব্যাপারটাই ডিফারেনশিয়াল ক্যালকুলাসের কাজ।

এটাকে আরও সুন্দরভাবে বোঝা যায় যদি আমাদের ঢাল এবং লিমিট সম্পর্কে ধারণা থাকে। এর পরের অধ্যায়গুলোতে আমরা ফাংশন, লিমিট এবং ঢালের ধারণাগুলো সম্পর্কে আলোচনা করব।

১.৪ বইয়ের নাম 'নিমিখ পানে' কেন:

নিমিখ অর্থ হলো চোখের পলক। খুব ক্ষুদ্র সময় অর্থে নিমিখ ব্যবহার করা যায়। আমরা এখানে নিমিখের প্রচলিত অর্থটাকে আরেকটু বিস্তৃত করতে চাই। শুধু সময় নয়, যেকোনো কিছুর খুব খুব খুব ছোট্ট পরিমাণকে নাম দিচ্ছি নিমিখ। ইংরেজিতে এটাকে বলে infinitesimal, infinitely small থেকে এই শব্দটা তৈরি। গণিতবিদ লিবনিজ যখন তার ক্যালকুলাস প্রকাশ করেন তিনি এই infinitesimal-এর ধারণা ব্যবহার করেছিলেন এমনসব ধারণাকে বোঝাতে যেগুলো খুবই ক্ষুদ্র। খুবই খুবই ক্ষুদ্র। যতটুকু কল্পনা করা যায় , তার থেকেও ক্ষুদ্র!

এমন ধারণার দরকার কেন হলো? চলো একটু বোঝাই।

ধরা যাক, আমরা ঢাকা থেকে কুষ্টিয়া যাব। আমার বাড়ি কুষ্টিয়া তো, এই জন্য! ঢাকা থেকে কুষ্টিয়ার দূরত্ব ২৬৫ কিলোমিটার। ঢাকা থেকে আমরা যে কুষ্টিয়া যাচ্ছি, সেটা যেতে আমাদের লাগে ৫ ঘণ্টা। তাহলে আমার গতিবেগ কত? মানে ঘণ্টায় আমরা কত কিলোমিটার যাচ্ছি?

যেহেতু ৫ ঘণ্টা সময় লাগে এবং আমরা ২৬৫ কিলোমিটার যাচ্ছি, তাহলে আমাদের দ্রুতিবেগ ৫৩ কিলোমিটার। কিন্তু এখন চিন্তা করো তো আমি যখন শুরু করলাম তারপর থেকে কিন্তু আমার গতি কি সবসময় সমান ছিল? আমরা কি ৫৩ কিমি গতিতেই গিয়েছি? বাসটা অনেক জায়গায় খুবই ধীরে ধীরে চলেছে, কোনো জায়গায় হয়তো থেমে ছিল, আবার কোনো জায়গায় ৮০-৯০ কিমি বেগে চলেছিল।

আমরা যদি একটি যেকোনো একটা মুহূর্তের গতিবেগ জানতে চাই তাহলে কেমনে জানব? এখন কোনো একটা নির্দিষ্ট মুহূর্তের ছবি তুললে আমরা কিন্তু

একটি স্থির বস্তু দেখব। ভাবো, মোবাইলের ক্যামেরা দিয়ে আমি যদি বাসটার যেকোনো মুহূর্তের ছবি তুলি, তাহলে সেটাকে স্থির মনে হবে। বহুকাল আগে চিন্তাবিদ 'জেনো' এই কথাটাই বলেছিলেন। একটা তীর যখন চলে প্রতি মুহূর্তে তো সে স্থির, তাহলে সে চলছে কী করে? চিন্তার বিষয়! সেই চিন্তা আমরা এখানে বাড়াব না, আগ্রহীরা জেনোর প্যারাডক্স নিয়ে পড়তে পারো।

আমরা ভাবি, যেকোনো মুহূর্তের বেগ যদি আমরা জানতে চাই তাহলে কীভাবে জানব? গতিবেগ এমন একটা ধারণা যেটা জানতে গেলে একটা সময়ের ব্যবধান লাগে, আর লাগে সেই ব্যবধানে গতিশীল বস্তুটা কতটুকু গেল সেটা। যদি ব্যবধান পুরো ৫ ঘণ্টাই নিই, তাহলে মাঝে কোনো একটা সময়ে গতিবেগ কত ছিল বোঝা যাচ্ছে না। আবার একটা স্থির মুহূর্ত নিলেও টের পাওয়া যাচ্ছে না। তাহলে উপায়?

উপায় হলো খুব কাছাকাছি দুটো বিন্দু নিয়ে ভাবা! সে বিন্দু দুটো যত কাছাকাছি হয় তত ভালো আসলে। এখানেই আমাদের সমস্যাটা। সময়ের ব্যবধান কত কাছাকাছি আমরা নিতে পারি?

এটা হতে হবে অনেক ক্ষুদ্র। ঘণ্টা নয়, নয় মিনিট। সেকেণ্ড নয়, আরও ছোট, আরো অনেক ছোট- আমাদের ছুটতে হবে নিমিখ পানে!

এটাকে গাণিতিকভাবে লেখা হয় $\Delta t \to 0$। বা, সময়ের ব্যবধান শূন্যের সন্নিকটবর্তী!

উঁহু, আর নয়! প্রথম অধ্যায়েই বই শেষ করে দিলে কেমন দেখায়! চলো আরেকটু জ্ঞান অর্জন করি, তারপরে বুঝতে পারবে কী বলতে চাচ্ছি।

১.৪ ইতিহাসের পাতা থেকে

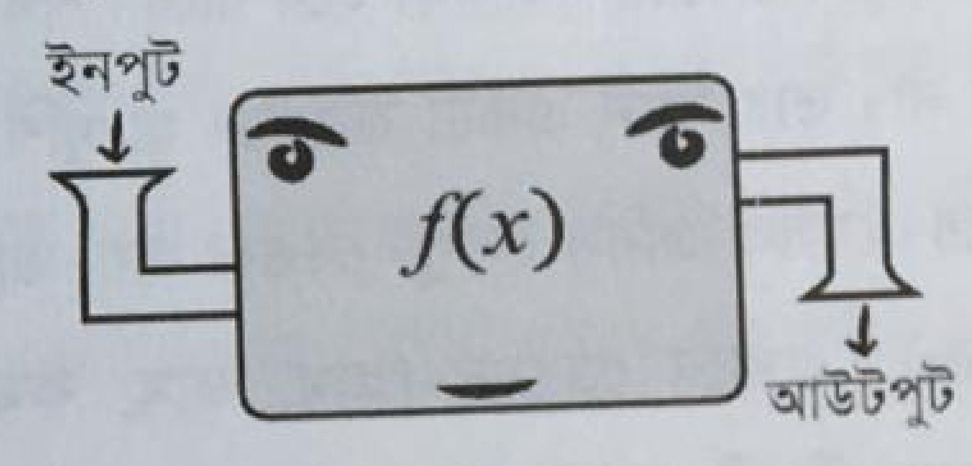
আইজ্যাক নিউটন (১৬৪২-১৭১২): ইংরেজ গণিতবিদ আইজ্যাক নিউটনকে বলা হয় পৃথিবীর সর্বকালের তিনজন শ্রেষ্ঠ গণিতবিদের একজন। আর দুজন হলেন আর্কিমিডিস ও গাউস। নিউটন যখন কেমব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হলেন তিনি যে অনেক গণিত জানতেন,তা না।তবে তার জানার কৌতুহল ছিল প্রচণ্ড রকম। বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিতের ওপর যা যা পেয়েছেন, গোগ্রাসে গিলেছিলেন। এমন সময় ইউরোপে মহামারি আকারে এল প্লেগ। বন্ধ হয়ে গেল বিশ্ববিদ্যালয়, নিউটন ফিরে এলেন বাড়িতে। তিনি সুযোগ পেলেন স্বাধীনভাবে চিন্তা করার। আর তার এই চিন্তা করার সুযোগ মানবসভ্যতাকে এগিয়ে নিয়ে গেল বহুদূর। ১৬৬৫, ১৬৬৬ এই দুই বছরে তিনি তার জীবনের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কারগুলোর কয়েকটা করেন। দ্বিপদি উপপাদ্য এবং ফাংশনকে অসীম ধারার যোগফল হিসেবে প্রকাশ, ডিফারেন্সিয়াল এবং ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের যোগসূত্র স্থাপন, গতিসূত্র এবং মহাকর্ষ, তার বিখ্যাত প্রিজম পরীক্ষা সবগুলোই এই দুই বছরের মধ্যে! নিউটন ভয়ে থাকতেন তার এই যুগান্তকারী চিন্তাগুলোকে হয়তো বিজ্ঞানীরা পাগল-ছাগলের কাজ বলে অবজ্ঞায় উড়িয়ে দেবে! অবশেষে ১৬৮৭ সালে বন্ধু হ্যালি (যার নামে হ্যালির ধূমকেতু) অনেক জোরাজুরি করে তার কাজগুলোকে প্রকাশের ব্যবস্থা করলেন। বের হলো 'Principia Mathematica', যেটি বিজ্ঞানের ইতিহাসে সবচেয়ে বিরাট মাইলফলকগুলোর একটি।

অধ্যায় ২

বিচিত্র সব ফাংশন, আজব তাদের চেহারা

২.১ সখী, ফাংশন কারে কয়—সে কি কেবলই যাতনাময়?

নাহ, ফাংশন বুঝতে কোনো জ্বালা-যাতনা নেই। সহজ ব্যাপার, তোমরা চাইলেই মূল ধারণা বুঝে ফেলতে পারবে।



চিত্র ২.১: ফাংশন হলো মেশিনের মতন

ছোট্ট করে বলি, হলো একটা মেশিনের মতো ব্যাপার। কিছু একটা দিলে কিছু একটা পাওয়া যায়। যা দেওয়া হচ্ছে সেটা হলো ইনপুট (input) আর যা পাচ্ছ, সেটা হলো আউটপুট (output)।

ভেঙে বলি সোজা বাংলায়, মনে করো, একটা জুস বানানোর মেশিন আছে। সেখানে কমলা ঢুকিয়ে দিলে কমলার রস পাবে। আপেল ঢুকিয়ে দিলে

আপেলের রস পাবে। তাহলে এই জুস বানানোর মেশিনটা একটা ফাংশন। তবে, ফাংশন হতে গেলে আরও একটা শর্ত মানতে হয়! একই ইনপুটের জন্য হরেকরকম আউটপুট হওয়া যাবে না। যেমন ধরো, লটারির টিকিট কেনার ঘটনা। টিকিটের দাম হলো ১০ টাকা, এটাই ইনপুট। এখন এই ১০ টাকা দিয়ে তুমি কী আউটপুট পাবে, সেটা কিন্তু নির্দিষ্ট না। কেউ ১০ টাকা দিয়ে ৫০ লাখ টাকা জিততে পারে, আবার কেউ হয়তো ০ টাকা পাবে, মানে কিছুই পাবে না। তাহলে এটা ফাংশন না। কিন্তু ধরো সেই জুস বানানোর মেশিন। এখানে কমলা দিলে সে প্রতিবার কমলার জুসই পাবে। কমলা ইনপুট দিয়ে আপেল কিংবা তরমুজের রস পাওয়া যাবে না। আপেল ইনপুট দিলে আপেলেরই জুস পাবে। ইনউটের জন্য আউটপুট নির্দিষ্ট। এটা একটা ফাংশন।

আরেকটা ব্যাপার, ওই জুস বানানোর মেশিনে ইটের টুকরো ঢুকিয়ে দিলে কি কাজ করবে? উঁহু! মেশিনের দফারফা হয়ে যাবে। শখ করে 'ইটের জুস' আর খাওয়া হবে না। তার মানে একটা ফাংশনে যা খুশি তাই ইনপুট নাও দেওয়া যেতে পারে। যেসব জিনিস ইনপুট দেওয়া যায়, তাদের সেটকে বলে ডোমেন (domain)। এখানে ডোমেন={আম, জাম, কমলা, ...}। আবার একটা মেশিন থেকে কী কী আউটপুট পাওয়া যাবে, সেটাও অনেক সময় নির্দিষ্ট। যেমন জুস বানানোর মেশিন থেকে আচার কখনো পাবে না। এমন করে সেসব জিনিস পাওয়া সম্ভব তাদের সেটকে বলে রেঞ্জ (range)। এখানে রেঞ্জ= {আমের জুস, আপেলের জুস, কমলার জুস,...}।

গণিতের ভাষায় বলি, গণিতে ফাংশনকে লেখা হয় $f(x)=x^2$ আকৃতিতে। এখানে f হলো ফাংশনটার নাম, x হলো ইনপুট আর x^2 হলো এই মেশিনটা কী কাজ করে, সেটার বর্ণনা। যেমন এই মেশিনটা যাকে পায় তাকে ধরে বর্গ করে ফেলে। এটা একটা ফাংশন কারণ 2 দিলে কখনোই 4 ছাড়া অন্য

কোনো আউটপুট পাওয়া যাবে না। কিন্তু -2 দিলেও তো 4 আসে! আসুক, অসুবিধে নেই! -2 যতবার দেবে, ততবার 4-ই আসবে, অন্য কিছু আসবে না। একটা ইনপুটের জন্য একাধিক আউটপুট পাওয়া চলবে না। কিন্তু দুটো ভিন্ন ইনপুটের জন্য একই আউটপুট পাওয়া গেলে সমস্যা নেই।

এখানে খেয়াল করো, ফাংশনের নামটা ইংরেজি অক্ষর f দিয়ে লেখে অনেকেই, যেহেতু এটা function শব্দটার প্রথম অক্ষর। তার মানে এই নয় যে অন্য কোনো নামে লেখা যাবে না। $\text{Borgo}(x) = x^2$, এটা লিখলেও কোনো সমস্যা ছিল না। ভেতরের চলকটা x হতে হবে এমনও কোনো কথা নেই। $\text{Borgo}(t)=t^2$ লিখলেও একই ফাংশন বোঝাত! $f(x)=x^2$ আর $\text{Borgo}(t)=t^2$ একই জিনিস, দুটোরই কাজ বর্গ করা। এমন নাম তুমিও দিতে পারো যা খুশি!

দেখি তো, বুঝলে কি না!

চিন্তাভাবনা ২.১ ক্যাসিনোর জুয়া খেলার মেশিনে 5 ডলার দিলে একটা চাকা ঘোরে, সেই চাকার ওপরে নানান কথা লেখা। ঘুরতে ঘুরতে যেখানে এসে পড়ে, সেখানে যা লেখা থাকবে সেটাই পাবে। এই জুয়ার মেশিন কি ফাংশন?

চিন্তাভাবনা ২.২ বসুন্ধরা সিটির সামনে একজন মানুষ ওজন মাপার মেশিন নিয়ে বসে থাকে। ওখানে তুমি দাঁড়ালে ওজন দেখায় 60 কেজি, তোমার বন্ধু দাঁড়ালে 50 কেজি। ওজন (তুমি)=60, ওজন (বন্ধু)=70। অল্প সময়ের ভেতরে তাকালে এটি কি ফাংশন?

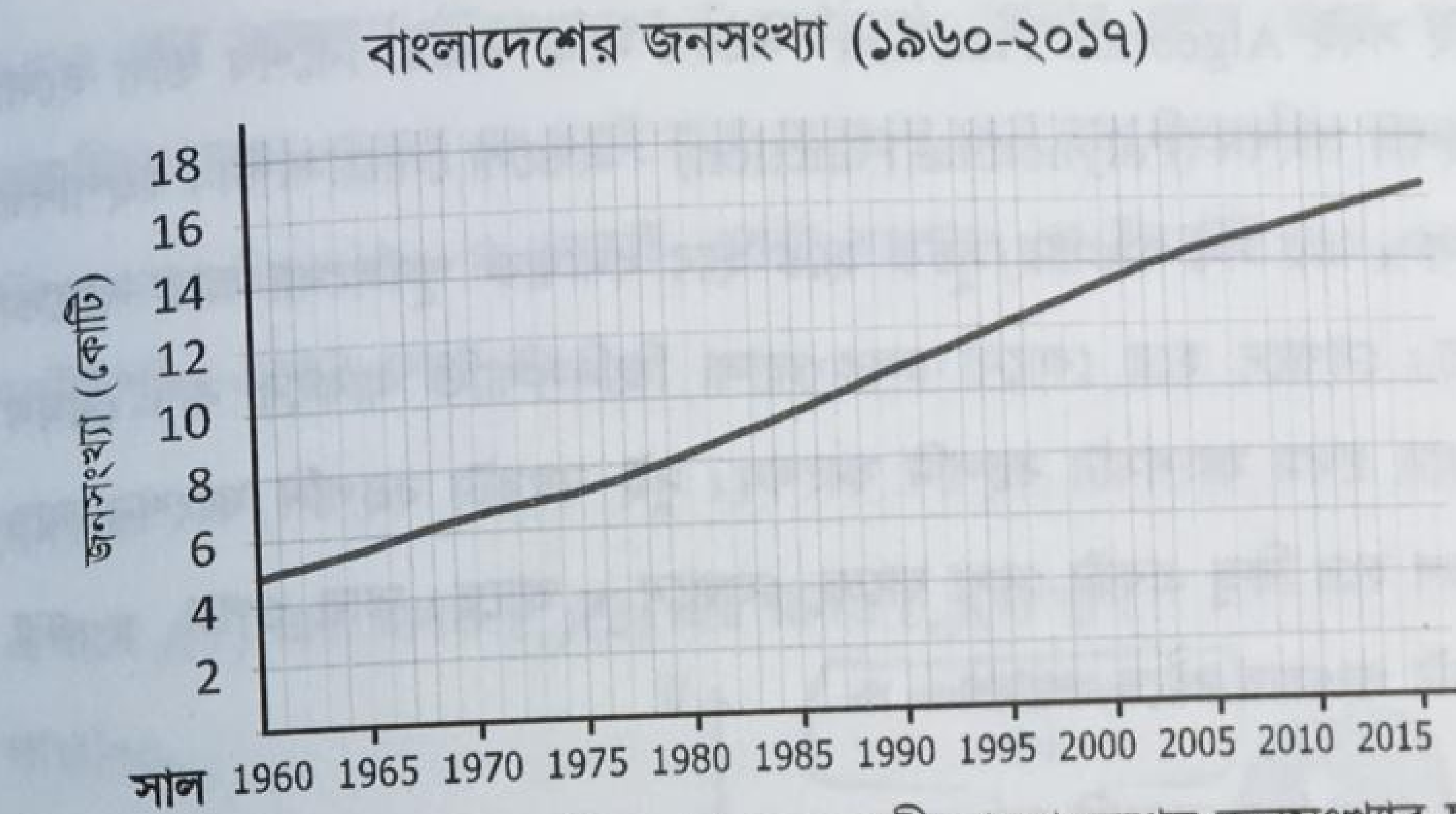
২.২ ফাংশন প্রকাশের আরও উপায়

ফাংশন কি অন্যভাবে প্রকাশ করা যায় না? যায়। আরও বেশ কয়েকভাবে ফাংশনকে প্রকাশ করা যায়। ইনপুট কী আর আউটপুট কী, সেটা বুঝতে পারলেই হলো। যেমন—

ক্রমজোড় ব্যবহার করে: কী ইনপুট দিলে কী পাওয়া যায়, সেটা পাশাপাশি লিখে ফাংশন প্রকাশ করা যায়। যেমন ওপরের ফাংশনকে এভাবে লেখা যায়—

জুসের মেশিন = {(আম, আমের জুস), (কমলা, কমলার জুস), (আপেল, আপেলের জুস)...}। দেখো প্রতিটা প্রথম বন্ধনীর (ফার্স্ট ব্রাকেট) ভেতরে কী ইনপুট দিচ্ছি আর কী পাচ্ছি, সেটা লেখা আছে। প্রথম বন্ধনীর ভেতরে কোনটা আগে আর কোনটা পরে লিখছি, সেটা কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ। (আম, আমের জুস) মানে হলো আম ইনপুট দিলে আমের জুস পাওয়া যাবে। (আমের জুস, আম) লিখলে বোঝাবে এমন মেশিন, যেখানে আমের জুস ইনপুট দিলে আম আউটপুট পাওয়া যাবে! অমন সাংঘাতিক মেশিন এখনো দুনিয়ায় নেই। যেহেতু এই ইনপুট আউটপুট জোড়ার ভেতরে কোনটাকে আগে, কোনটাকে পরে লিখছ সেই ক্রমটা গুরুত্বপূর্ণ, সে কারণেই এটাকে 'ক্রম'জোড় (ordered pair) বলে।

ছবি ব্যবহার করে: নিচের ছবিটার দিকে তাকাও। এটা সময়ের সাথে সাথে বাংলাদেশের জনসংখ্যা কীভাবে পরিবর্তিত হয়েছে সেটার একটা ছবি। একটা নির্দিষ্ট সালের জন্য একটা নির্দিষ্ট জনসংখ্যার মান আমরা পাই। তাই এটিও একটা ফাংশন। একটু খেয়াল করো—



চিত্র ২.২: বিশ্বব্যাংকের পরিসংখ্যান অনুযায়ী বাংলাদেশের জনসংখ্যার ছবি

২.৩ নানান রকম ফাংশন

ফাংশন আছে বহু রকমের। তবে ক্যালকুলাস সম্পর্কে জানতে গেলে কয়েকটা বিশেষ রকমের ফাংশন সম্পর্কে আগে থেকে ধারণা থাকাটা খুব দরকার। এদের বলে প্রাথমিক ফাংশন বা elementary functions। নিচে কয়েক রকম প্রাথমিক ফাংশনের কথা বলব। জেনে রেখো কয়েক ধরনের প্রাথমিক ফাংশন যদি যোগ, বিয়োগ, গুণ ভাগ করে নতুন ফাংশন পাওয়া যায়, সেটাকেও একটা প্রাথমিক ফাংশনই বলা হয়।

২.৩.১ বীজগাণিতিক ফাংশন (Algebraic Function): চলকের নানা রকম সূচক আর মূল—যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে যেসব ফাংশন পাওয়া যায় সবই Algebraic Function. আর হ্যাঁ, যেকোনো জায়গায় থাকতে পারে ধ্রুবসংখ্যা। উদাহরণ দিই, ধরা যাক x হলো চলক।

$f(x)=5x^2+3x+2$

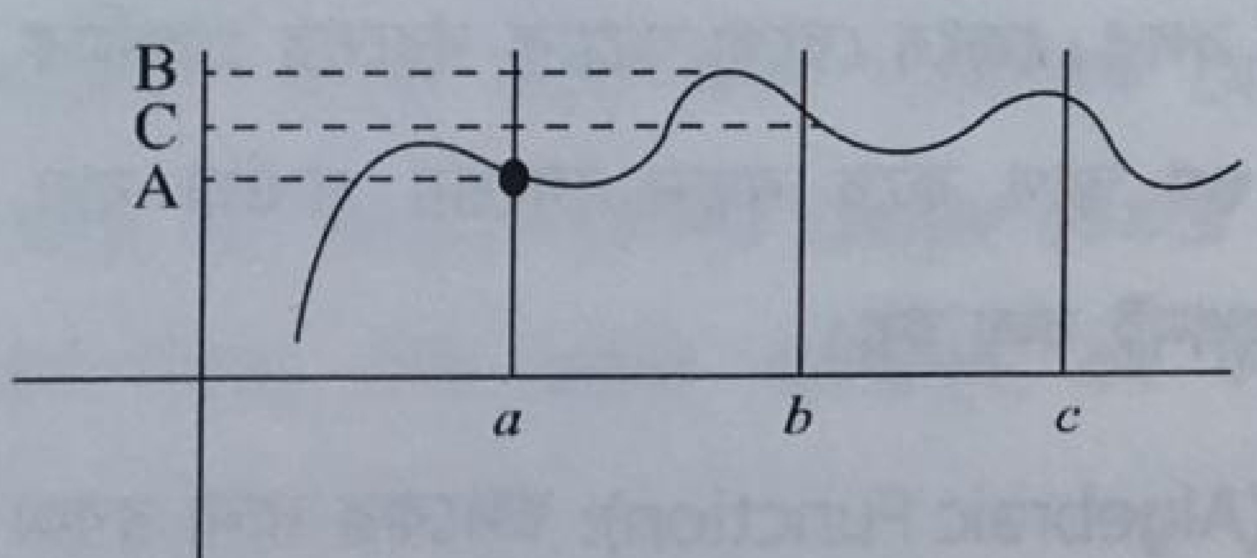
$f(x)=(x-2)/(x^{5/3}+4)$

এই সবই Algebraic Function। এদের মধ্যে একটা বিশেষ ভাগ হলো বহুপদি ফাংশন (Polynomial Function) - এগুলো সোজাসাপ্টা। বহুপদির জন্য x এর সব পাওয়ার/সূচক হতে হবে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা আর নয়তো শূন্য। সেখানে হরে কোনো চলকওয়ালা জিনিসপাতি থাকবে না। যেমন ওপরে প্রথম ফাংশনটা বহুপদি ফাংশন। দুই নম্বরটা বহুপদি ফাংশন না। কারণ হরে কিছু একটা দেখা যাচ্ছে, যেখানে x আছে। তার ওপর x এর একটা পাওয়ার আছে ভগ্নাংশ।

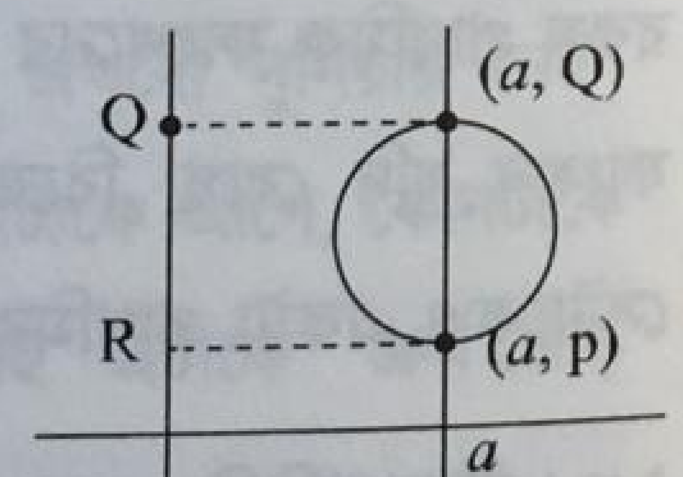
চলো দেখি কিছু বহুপদি ফাংশনের চেহারা। চেহারা মানে হলো লেখচিত্র।

লেখচিত্র থেকে ফাংশন যাচাই:

একটা ফাংশন y=f(x) আদৌ ফাংশন কি না, অর্থাৎ x-এর একটা মানের জন্য y-এর ঠিক একটাই মান পাওয়া যায় কি না, সেটা লেখচিত্র থেকে সহজে বুঝে ফেলা সম্ভব। এর উপায়টিকে বলে উল্লম্ব রেখা পরীক্ষা (Vertical line test)।



ফাংশন : উল্লম্ব রেখা ঠিক একবার ফাংশনকে ছেদ করেছে



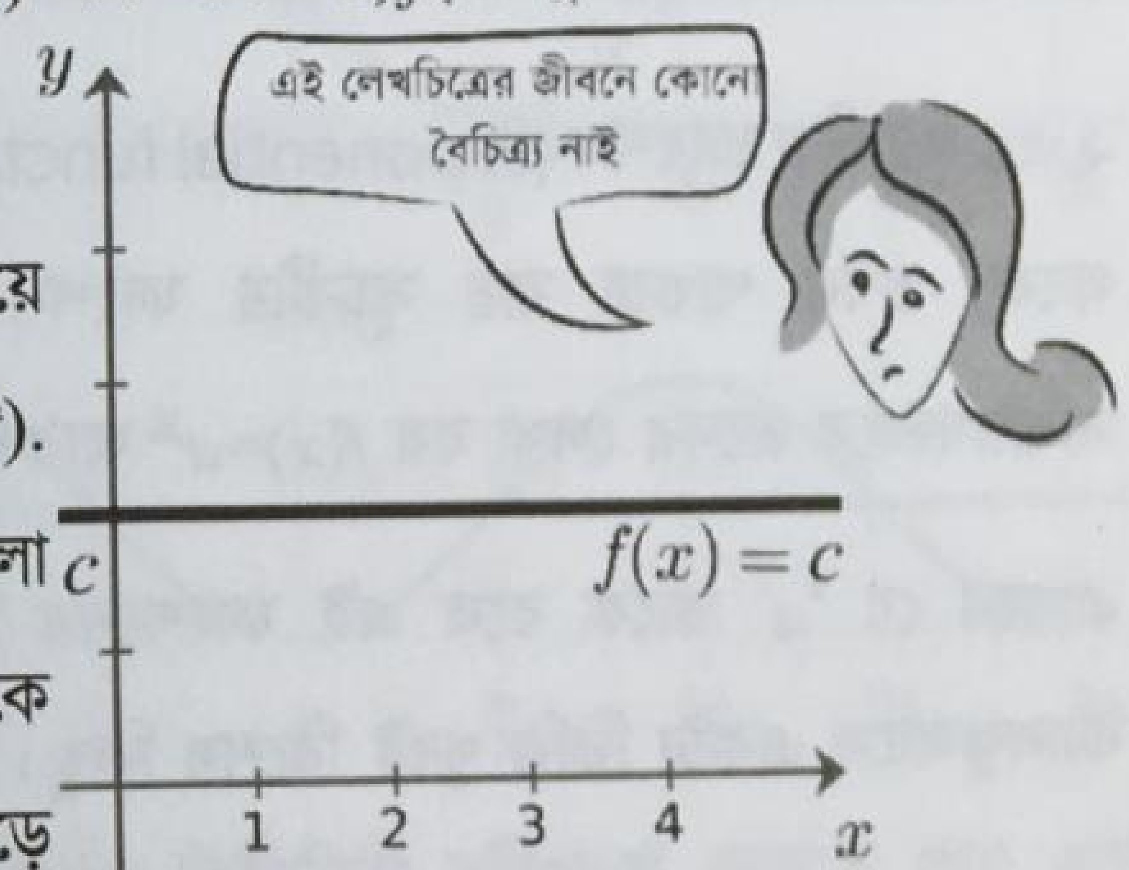
ফাংশন নয় : উল্লম্ব রেখা একের বেশি বার ছেদ করেছে

ওপরের ছবি দুটো থেকে ধারণা করতে পারো। বামের ছবিতে কোথাও একটা ইনপুটের জন্য একাধিক আউটপুট নেই। ডানের ছবিতে কিন্তু আছে! ফলে ডানের ছবিটা ফাংশন নয়।

২.৩.২ ধ্রুব ফাংশন (Constant Function): আমার মেয়ে প্রথম শব্দ বলেছিল ‘দাদা’। তাকে যে প্রশ্নই করা হোক না কেন তার উত্তর ছিল ‘দাদা’। Constant function এ রকমই একটা ব্যাপার। যে ইনপুটই দাও একই আউটপুট। এদের লেখা হয়—

$f(x)=c$

এখানে $f(1)$ এর মানও c, $f(2)$ এর মানও c, f(যা খুশি দাও)=c.



চিত্র ২.৪ : ধ্রুব ফাংশন

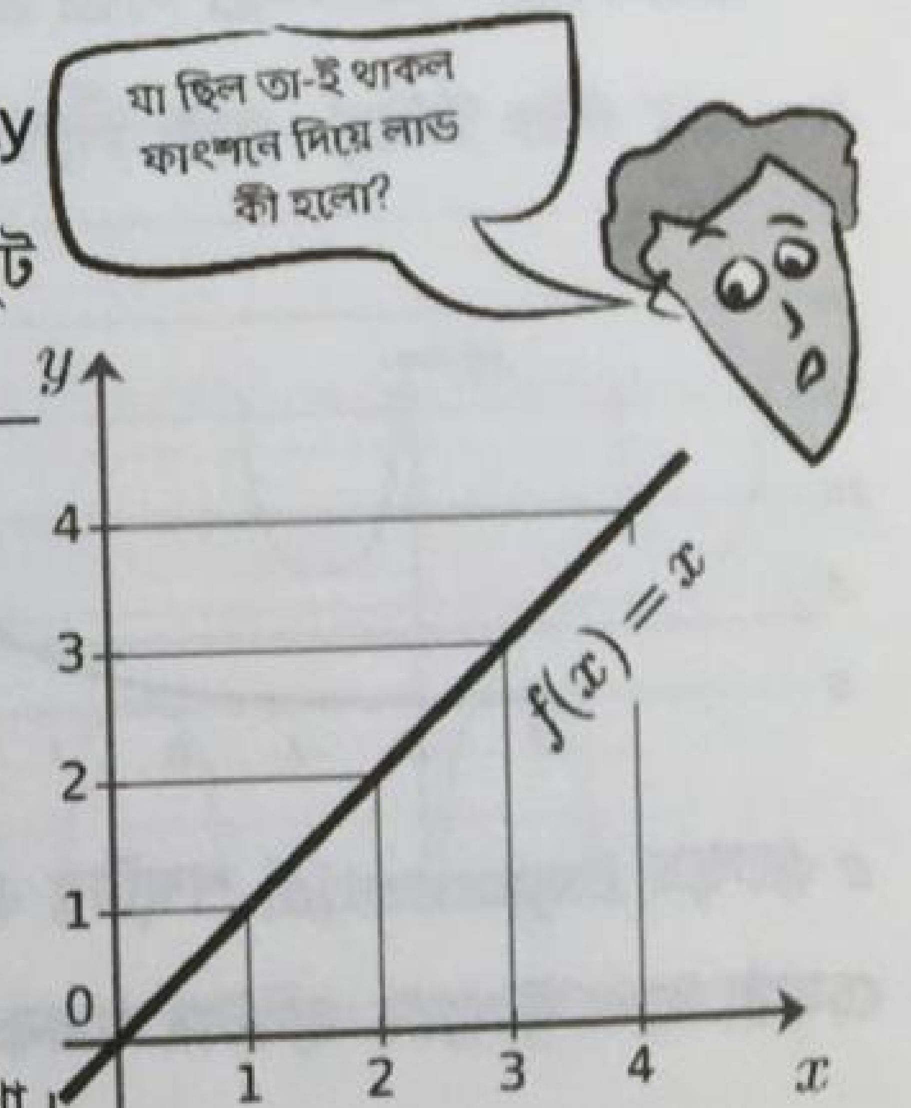
ধরো একটা গাড়ি t সময়ে কতদূর যায় তার ফাংশন $s(t)$. $s(t)=c$ হওয়ার মানে কী বলো তো? গাড়ি নষ্ট! মূলবিন্দু থেকে c দূরত্বে ওটা নষ্ট হয়ে পড়ে আছে!

২.৩.৩ অভেদ ফাংশন (Identity Function): ডাইরেক্ট লাইন; যা ইনপুট দেবে তা-ই আউটপুট। এটাকে লেখা হয়—

$f(x)=x$

অর্থাৎ, $f(a)=1, f(2)=2, f(3)=3,$

f(যা খুশি)= যা খুশি



এটার ছবিটা ভালো করে চিনে রাখো। (1,1), (2,2), (3,3) এই মানগুলো বসালে এমন মূলবিন্দুগামী একটা রেখা পাবে। X অক্ষের সাথে রেখাটা 45° কোণ উৎপন্ন করে।

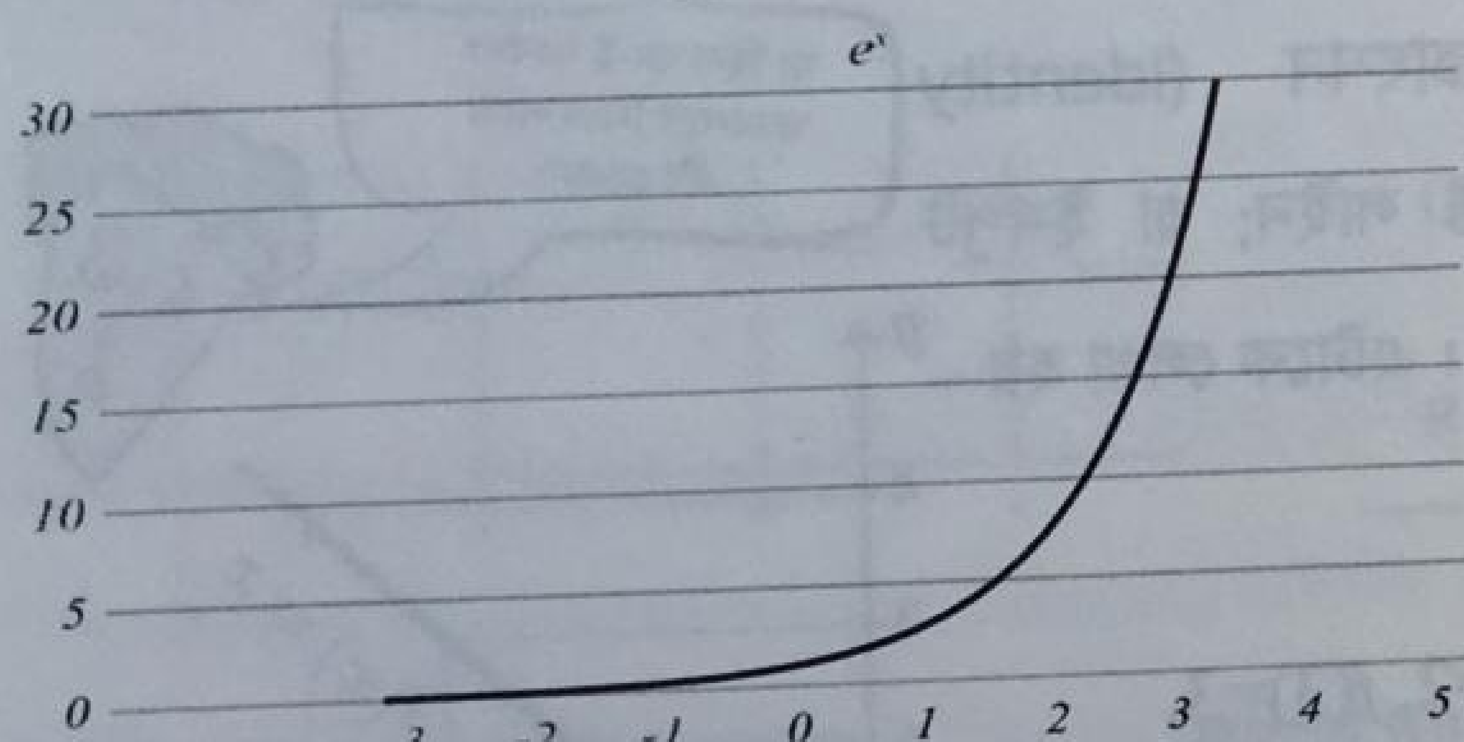
২.৩.৪ মূলদ ফাংশন (Rational Function): বহুপদীর অনুপাত হিসেবে যাদের প্রকাশ করা যায়। যেমন: $f(x)=(3x^2+4)/(2x+5)$ একটা মূলদ ফাংশন। লব হর দুইটাতেই বহুপদী।

এদের ক্ষেত্রে যেটা খুব জরুরি তা হলো নিচেরটার মান শূন্য হওয়া যাবে না। যেই মানের জন্য হর শূন্য হয়ে যায়, x এর সেই মানের কাছে গেলে ফাংশনটা অসীমের দিকে ছোটে।

২.৩.৫ সূচকীয় ফাংশন (Exponential function): x যখন নিজেই পাওয়ারে থাকে, তখন পাওয়া যায় সূচকীয় ফাংশন (Exponential function)। সাধারণভাবে এদের লেখা হয় $f(x)=a^X$ আকারে।

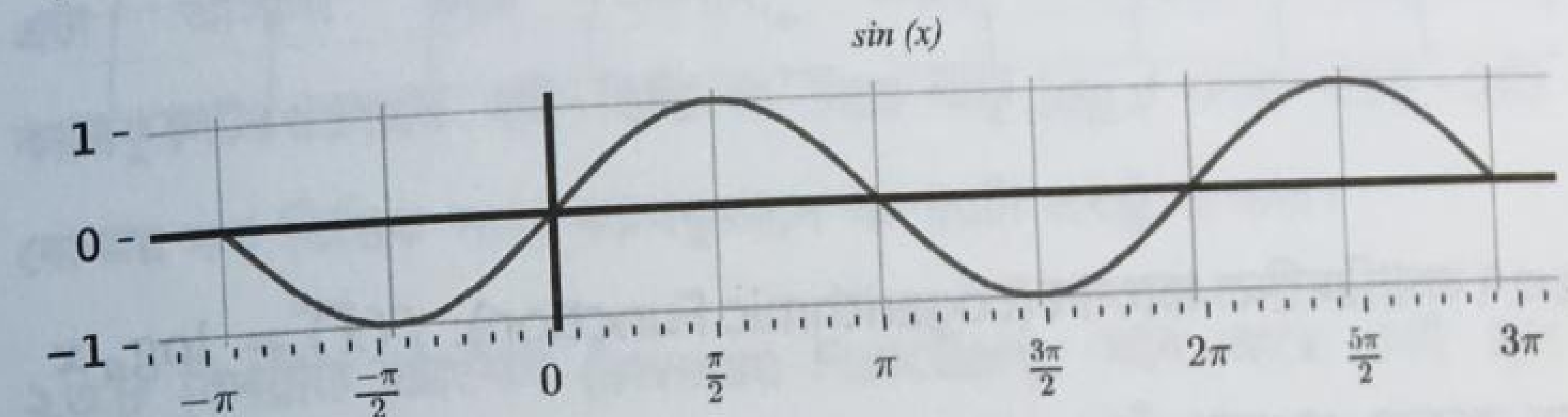
এখানে যে 'a' তাকে বলে এই ফাংশনের ভিত্তি। সবগুলো ভিত্তির মধ্যে ক্যালকুলাসে একটা ভিত্তি খুবই বিশেষ কিছু। তাকে বলে 'e'।

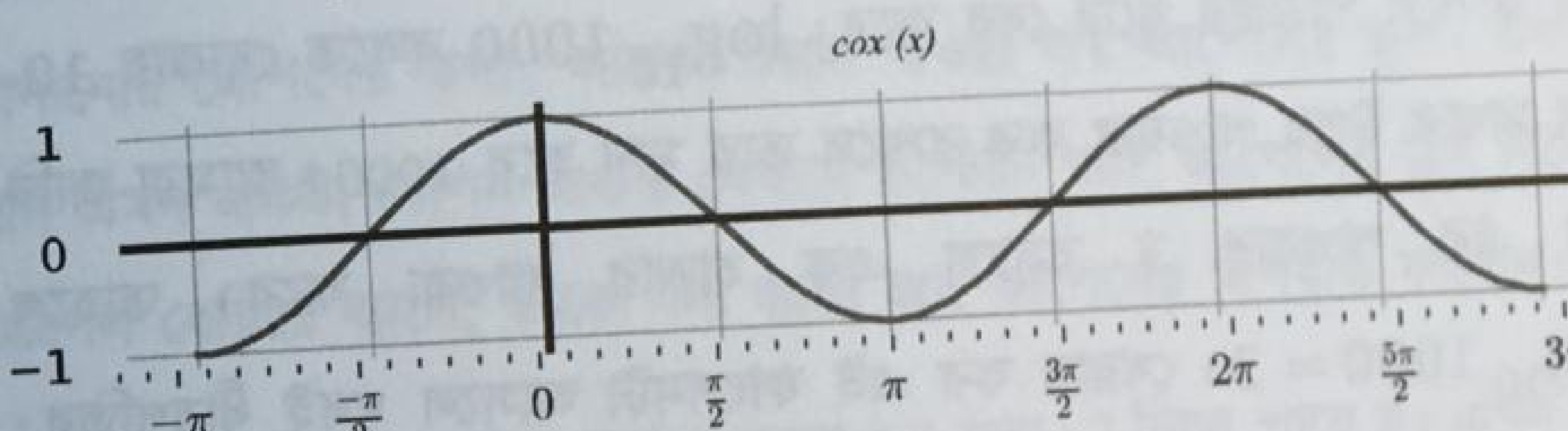
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828\ldots$$



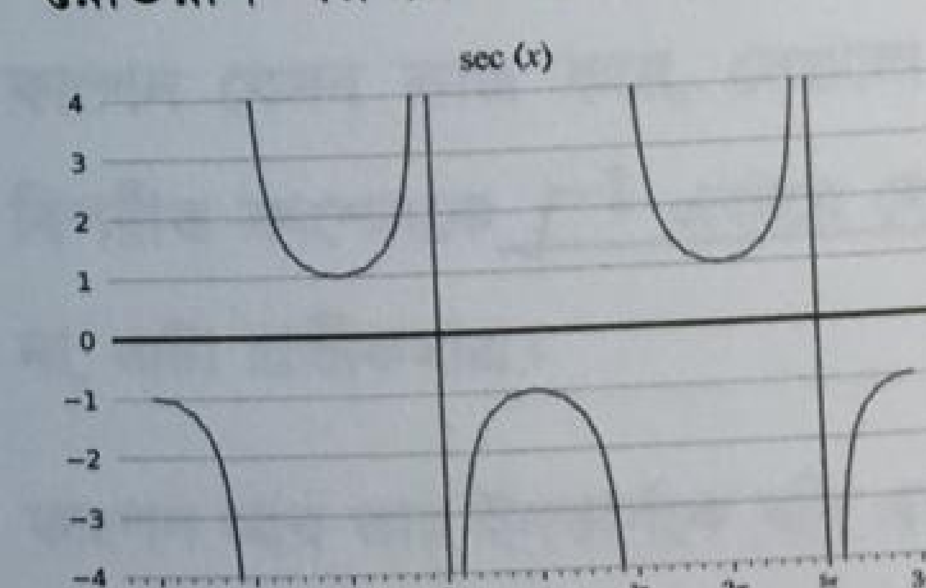
e এসেছে Exponential শব্দটার প্রথম অক্ষর থেকে। সাধারণভাবে এদের চেহারা হলো উপরের ছবিটার মতন।

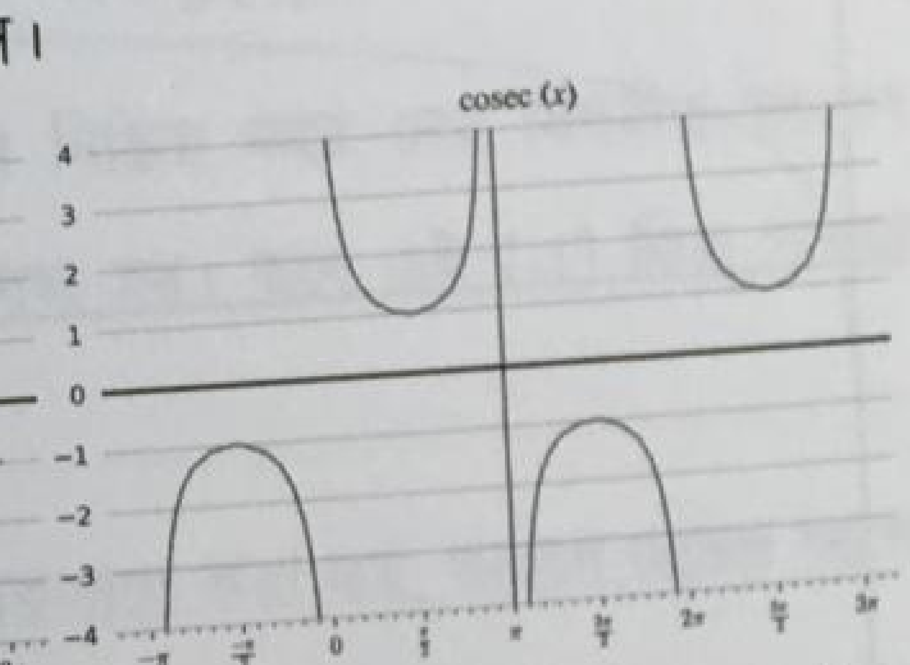
২.৩.৬ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন: সাইন, কোসাইন, ট্যানজেন্ট, সেকান্ট, কোসেক্যান্ট আর কো-ট্যানজেন্ট- মূলত এই ছয়টাকে বলে বৃত্তীয় ফাংশন। এদেরই প্রচলিত অর্থে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলে। আমরা বিস্তারিত ব্যাখ্যায় না গিয়ে এদের ছবিগুলো দেখতে চাই।



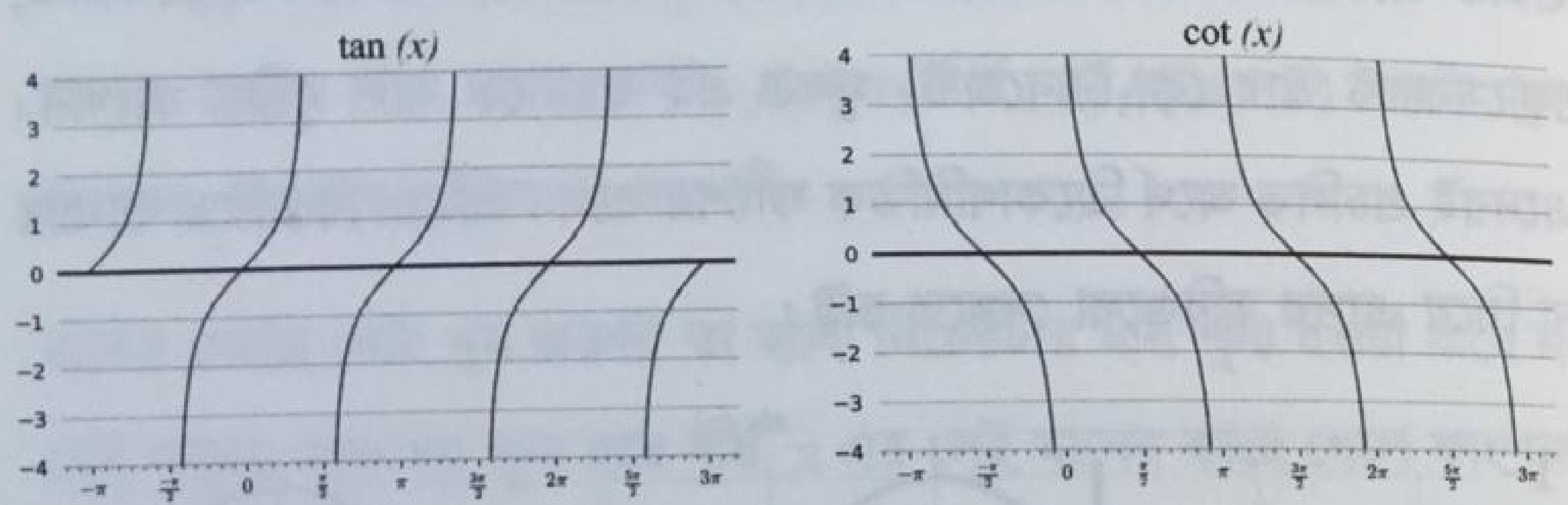


দেখো এই জলতরঙ্গে ঝিলিমিলি ঝিলিমিলি ছবিগুলো দেখতে প্রায় একই রকম। সাইনকে টেনে π/2 ঘর সরিয়ে দিলে কোসাইন পাবে। এরা দুজনই -1 থেকে +1 এর ভেতরে ঘোরাঘুরি করে। দুটোই প্রতি 2π রেডিয়ান পরপর ফিরে ফিরে আসে।



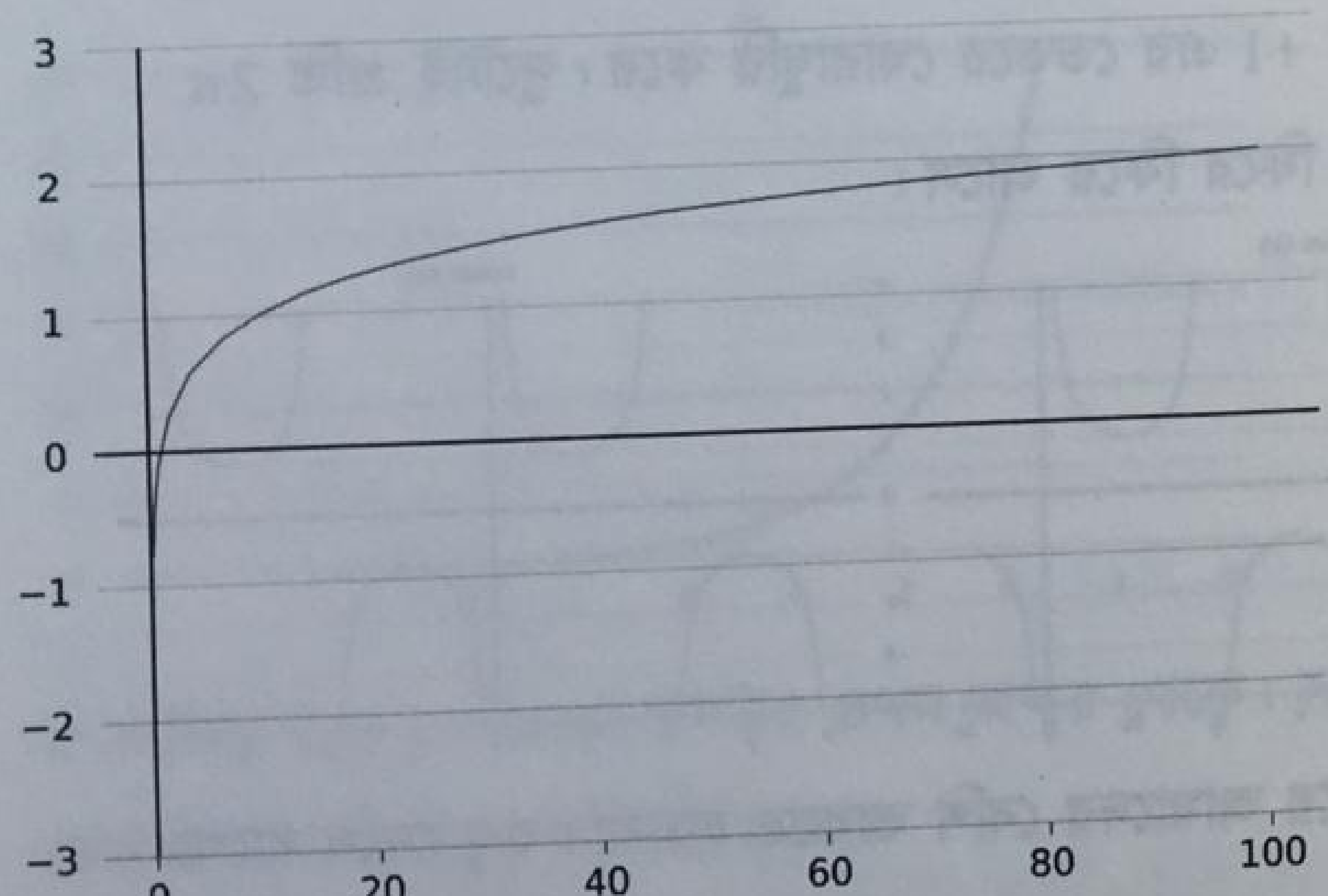


বাকিদের ছবি নিয়ে আমাদের বেশি ভাবতে হয় না। শুধু দেখে রাখো—



২.৩.৭ লগারিদমিক ফাংশন (Logarithmic Function): $f(x) = \log_a x$

লগ আসলে পাওয়ার খুঁজে বের করে। $\log_{10} 1000$ বলতে বোঝায় 10-এর মাথার উপর পাওয়ার কত বসালে তার মান হবে 1000। আমরা জানি দশ এর পাওয়ার 3 বসালে এক হাজার পাওয়া যাবে। তাহলে $\log_{10} 1000 = 3$। খেয়াল কর এই ফাংশনটা আসলে খুবই ধীরগতির। ১০০০ থেকে ১০০০০ হলে মান হতো চার। তুমি আরও দশগুণ করলে বাড়বে 1। ফাংশন। এবার ছবিটা দেখো।



আমাদের এই উদাহরণে ভিত্তি ছিল 10। তবে লগের ভিত্তিগুলোর মধ্যে সবচেয়ে জরুরি হলো e।

মনে রেখো - কোনো ভিত্তি না বলে দেওয়া থাকলে ক্যালকুলাসে $\log x$ বলতে বোঝায় e ভিত্তিক লগ। এটাকে $\ln x$ ও বলা হয় (logarithmus naturalis-এর প্রথম অক্ষরগুলো নিয়ে)।

এটা আলাদা করে বললাম, কারণ আমাদের সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটরগুলোতে যদি ভিত্তি না দিয়ে শুধু $\log x$ লেখা থাকে, সেটা বোঝায় দশ ভিত্তিক লগ। ক্যালকুলাসে ব্যাপারটা একটু আলাদা।

২.৩.৮ বিপরীত ফাংশন (Inverse Function): মনে আছে সেই জুস বানানোর মেশিনের কথা? আপেল দিলে পাওয়া যায় আপেলের জুস। এখন যদি এমন একটা মেশিন থাকত যেখানে উল্টোটা ঘটে, আপেলের জুস দিলে আপেল বেরিয়ে আসে, তাকে বলা হতো জুস ফাংশনের বিপরীত ফাংশন।

$f(x) = x^3$ এই ফাংশনের কাজ হলো ঘন করা। 2 দিলে পাবে 8। এখন 8 থেকে 2 এ ফেরত আসার জন্য কী করতে হবে? ঘনমূল। $g(x) = \sqrt[3]{x}$ এমন ফাংশন।

তাহলে $f(x)$ –এর বিপরীত ফাংশন হলো $g(x)$।

ফাংশন যেসব কাজ করে, সেগুলো নিষ্ক্রিয় করে দেয় বিপরীত ফাংশন। বিপরীত ফাংশনকে f^{-1} এভাবে লেখা হয়। তবে এই (-1) কিন্তু পাওয়ার না, এটা প্রতীকমাত্র।

ফাংশন আর তার ইনভার্সকে যদি একসাথে করা যায়, তাহলে অভেদ ফাংশন আসে। x কে ঘন করে যদি ঘনমূল নাও, আবার x পাবে।

অর্থাৎ, $f^{-1}(f(x)) = x$

একইভাবে, $f(f^{-1}(x)) = x$

২.৩.৯ বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন (Inverse Circular Function): যত রকম বিপরীত ফাংশন আছে তাদের ভেতর সবচেয়ে বিখ্যাত হলো এরা। sin এর বিপরীত ফাংশনকে বলে $\sin^{-1}$ বা arc-sin।

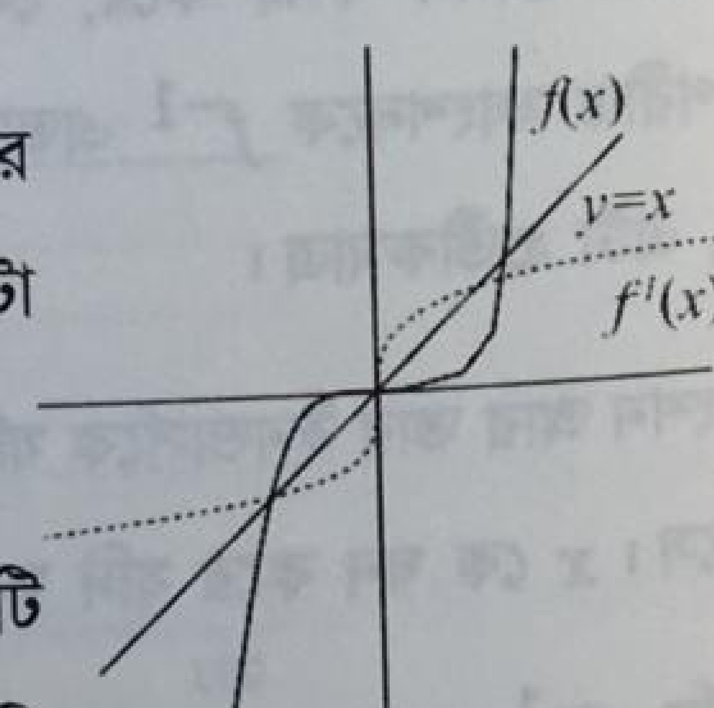
আমরা জানি $\sin\frac{\pi}{2}$ এর মান হলো 1। এখন যদি প্রশ্ন উল্টো প্রশ্ন করি যে, sin কত এর মান 1, সেই প্রশ্নটাই করে $\sin^{-1}$। তাহলে আমরা বলতে পারি, $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

এখানে একটা ব্যাপার দেখো, অনেক রকম কোণের sin এর মানই কিন্তু 1 হতে পারে। $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\frac{5\pi}{2} = 1, \sin\frac{9\pi}{2} = 1, \ldots$

তাহলে $\sin^{-1} 1$ কোনটা হবে: $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$ নাকি অন্য কিছু?

উত্তর হলো—সবগুলোই। তবে এদের ভেতর যেই কোণটার মান $-\pi/2$ থেকে $\pi/2$ এর ভেতরে সেটাকে বলে মুখ্যমান। ঠিক একই রকমভাবে অন্য ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোর বিপরীত ফাংশনও পাওয়া যায়।

২.৩ গ্রাফের ওপর মাতবরি



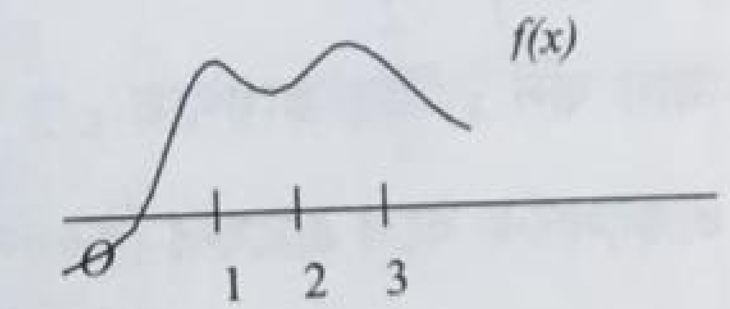
একটা ফাংশনের ছবি জানা থাকলে তার ইনভার্স বা বিপরীত ফাংশন কেমন হবে সেটা ছবি থেকেই চিন্তা করা যায়।

ইনভার্স হওয়ার মানে কী? ভুজ হয়ে যাবে কোটি আর কোটি হয়ে যাবে ভুজ। মূল ফাংশনে যদি 8 ইনপুট দিলে ১৬ আউটপুট আসে, ইনভার্স ফাংশনে হবে উল্টো—১৬ ইনপুট দিলে পাবে 8। গ্রাফে এই কাজটা দারুণভাবে করা যায় $y = x$

রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব নিয়ে।

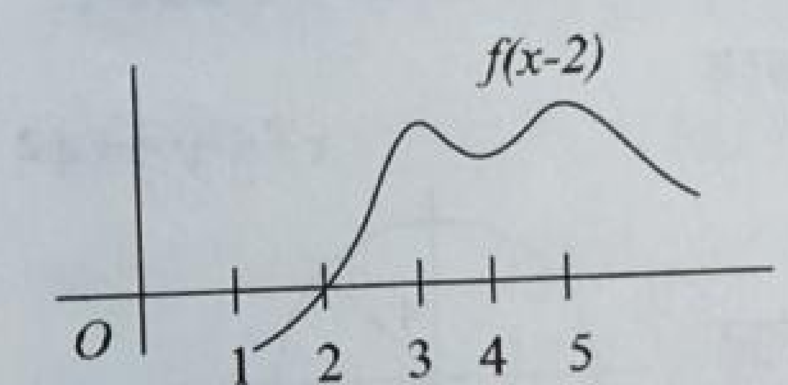
এ অধ্যায়টা শেষ করব একটা মজার জিনিস দিয়ে। কী করে গ্রাফকে টানা, হ্যাঁচড়া, ফোলানো, চুপসানো যায়।

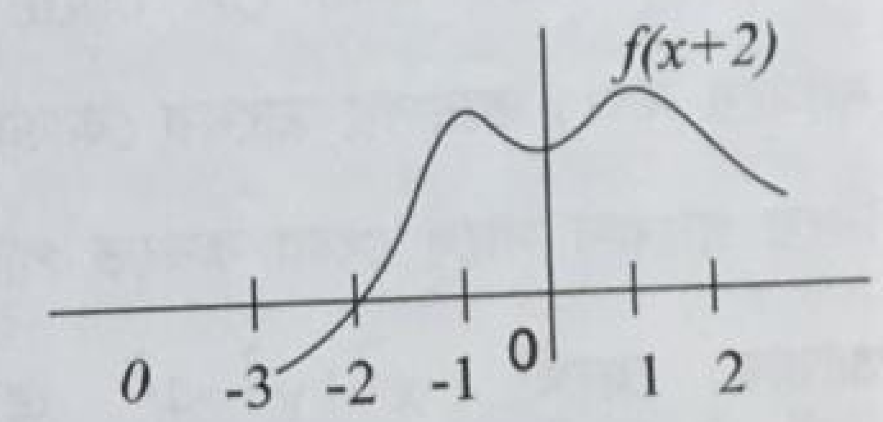
ধরো আমাদের কাছে আছে একটা ফাংশন—



$y=f(x)$

যদি x-এর জায়গায় $(x-2)$ বসিয়ে দাও, কী হবে জানো? গ্রাফটা ডানদিকে দুই ঘর সরে যাবে।

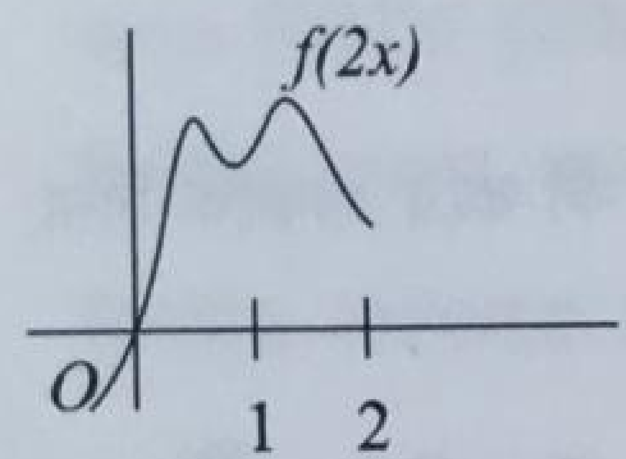


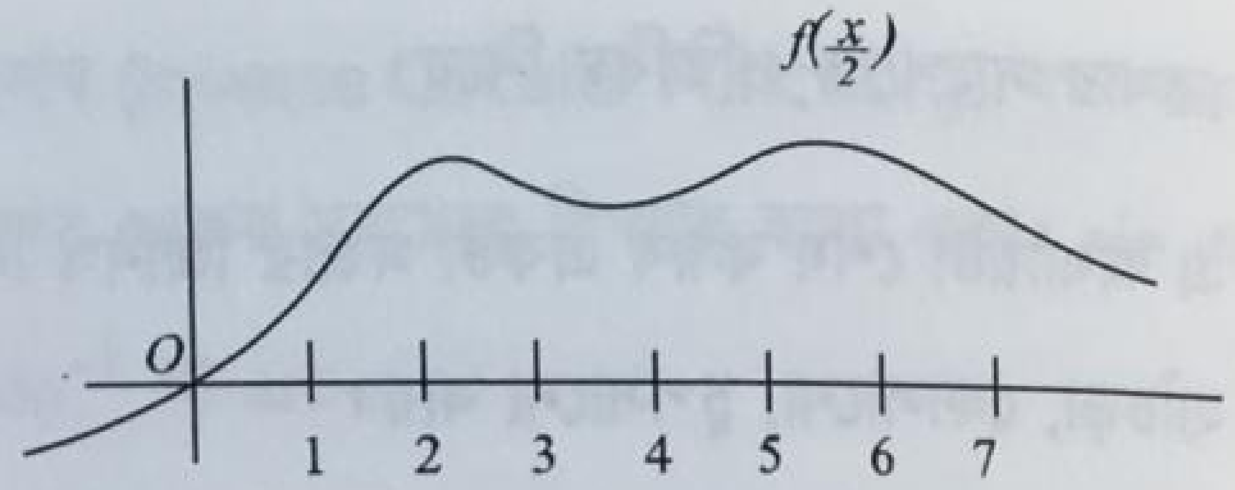


ব্যাপারটা এভাবে বুঝতে পারবে। ধরো, একটা ফাংশন ছিল যেখানে 1 দিলে 100 পাচ্ছিলে, 2 দিলে 200 , 3 দিলে 300, 4 দিলে 400, 5 দিলে 500। এখন ভিতরে x-2 থাকার কারণে তুমি দেবে পাঁচ কিন্তু ভিতরে ও দুই কমে হয়ে যাবে তিন, তুমি পাবে 300। এভাবে ভাবো, আগে 3 দিলেই 300 পাচ্ছিলে, এখন 300 পেতে হলে আরো এগিয়ে যেতে হবে 5 পর্যন্ত। এখন 100 পেতে হলে যেতে হবে 3 পর্যন্ত, 200 পেতে 4 পর্যন্ত- ফলে সব ডানে সরে যাবে দুইঘর। একইভাবে, যদি x-এর জায়গায় $(x+2)$ বসাও, মূল ফাংশনটা বামদিকে 2 ঘর সরবে।

এগুলোকে বলে গ্রাফের সরণ (Translation)।

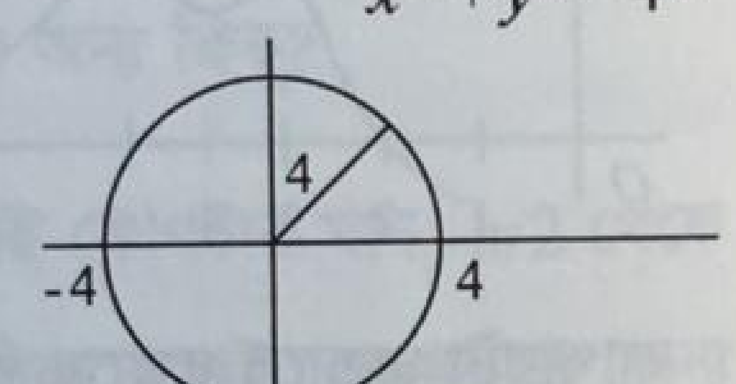
এবার দেখো, যদি x-এর জায়গায় $2x$ লিখো গ্রাফটা x অক্ষ বরাবর মানে আড়াআড়িভাবে চেপে যাবে দুই গুণ।





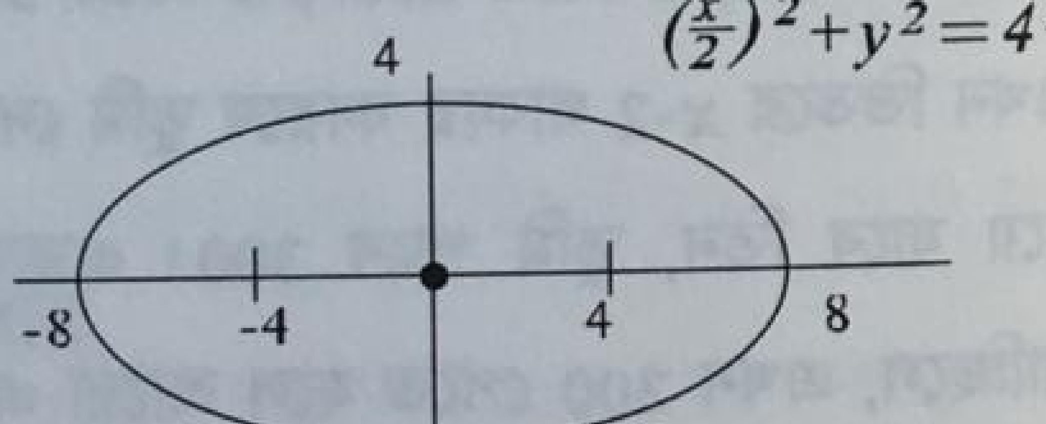
আর যদি x-এর জায়গায় $x/2$ বসাও গ্রাফটা আড়াআড়িভাবে মোটা হয়ে যাবে! এগুলোকে বলে গ্রাফের বিবর্ধন (Scaling)। একসাথে এগুলোকে বলে গ্রাফের রূপান্তর বা Transformation। তোমাদের যাদের কাছে স্মার্টফোন আছে তারা QR code scanner অ্যাপ নামিয়ে নাও। তারপর ডানের কোডটা স্ক্যান করে নিয়ে গ্রাফের সাথে খেলা করতে পারো!

$x^2+y^2=4^2$



আবার দেখো, $x^2+y^2=4^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। এটির কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, ব্যাসার্ধ 4.

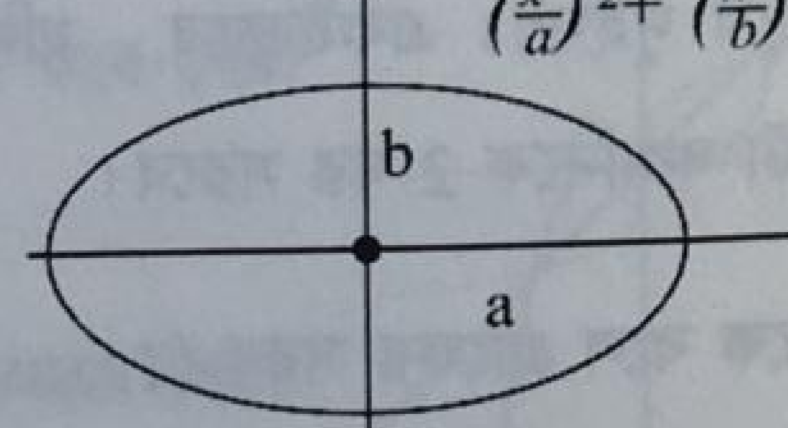
$(\frac{x}{2})^2+y^2=4^2$



x-এর জায়গায় $x/2$ বসালে কী হবে জানো? X- অক্ষ বরাবর আড়াআড়িভাবে দ্বিগুণ হয়ে যাবে।

$(x/2)^2+y^2=4^2$

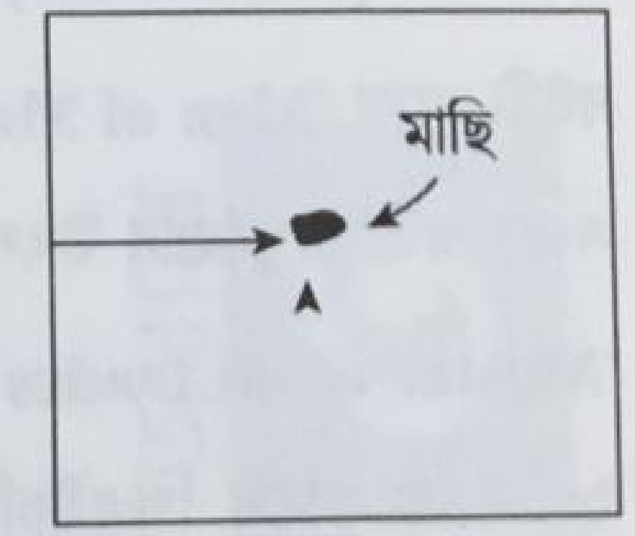
$(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$



$x^2+y^2=1^2$ হলো একক বৃত্ত যার ব্যাসার্ধ 1। x-এর জায়গায় x/a আর y-এর জায়গায় y/b বসালে X অক্ষ বরাবর লম্বা হয়ে যাবে a গুণ আর Y অক্ষ বরাবর b গুণ। পাবে—

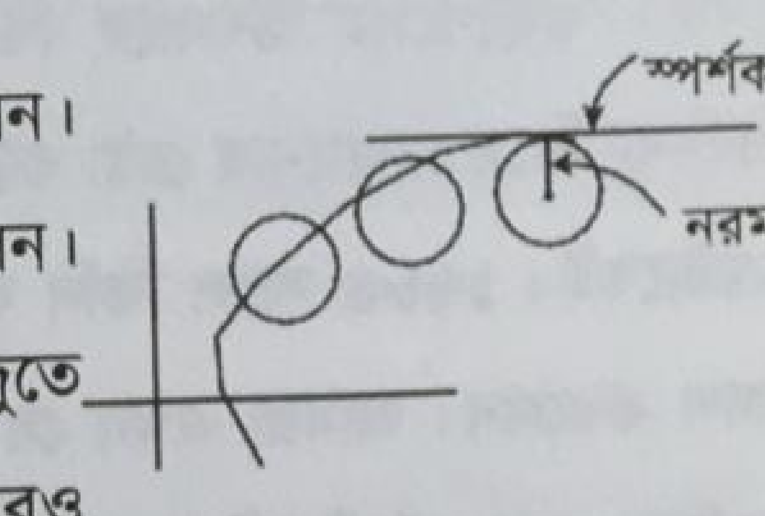
$(x/a)^2+(y/b)^2=1$, একটি উপবৃত্ত।

২.৪ ইতিহাসের পাতা থেকে



রেনে দেকার্তে (১৫৯৬-১৬৫০): দেকার্তে ছিলেন একজন ফরাসি গণিতবিদ এবং দার্শনিক। দেকার্তে গভীরভাবে ভাবতে ভালোবাসতেন। বলতেন যতক্ষণ ভাবনা আছে, ততক্ষণ আমার অস্তিত্ব নিয়ে সন্দেহ নেই (I think, so I am)।

তাকে নিয়ে একটা গল্প আছে এমন। একদিন তিনি তার বিছানায় শুয়ে ছাদের দিকে তাকিয়ে উদাসমনে ভাবছেন, হঠাৎ দেখলেন ছাদের কাছাকাছি একটা মাছি উড়ে বেড়াচ্ছে। দেকার্তের মনে প্রশ্ন জাগল, আচ্ছা মাছিটা কোথায় আছে—এটাকে গাণিতিকভাবে ভাবা যায় কী করে? তখন তিনি ভাবলেন ছাদের দুইটা ধার থেকে দূরত্ব মেপে মাছির অবস্থান বলে দেওয়া যাবে। জন্ম হলো স্থানাংক জ্যামিতির। এটা ক্যালকুলাসের জন্য খুবই বৈপ্লবিক একটা ব্যাপার ছিল। একটা বিন্দুকে যখন ভুজ, কোটি দিয়ে প্রকাশ করা সম্ভব হলো, তখন ফাংশনগুলোর ছবি আঁকার ধারণা এল। ইনপুটগুলোকে ভুজ আর আউটপুটগুলোকে কোটি ভেবে নিলেই তো ছবি আঁকা যাবে!



দেকার্তে ফাংশনগুলোর ছবি আঁকলেন। তাদের বৈশিষ্ট্য নিয়ে লিখলেন। ফাংশনগুলোর লেখচিত্রে কোনো বিন্দুতে স্পর্শক কী করে আঁকা যাবে তারও একটা নিয়ম তৈরি করলেন। বললেন যেখানে স্পর্শক আঁকতে চাও, সখানে একটা বৃত্ত খুঁজে বের কর যা লেখচিত্রকে ওই বিন্দুতে স্পর্শ করে। ওই বিন্দু আর বৃত্তের কেন্দ্র যোগ করলেই পাবে উল্লম্ব রেখা আর স্পর্শবিন্দুতে উল্লম্বের ওপর লম্বভাবে একটা রেখা টানলেই পাবে স্পর্শকরেখা। ছবি থেকে

ধারণা নিতে পারো। বুঝলে মজা পাবে, না বুঝলেও কিছুমাত্র অসুবিধা নেই।

লিবনিজ (১৬৪৬-১৭১৬): গণিতবিদদের জীবনী নিয়ে সবচেয়ে অসাধারণ বইটি হলো **'Men of Mathematics'**, যার লেখক **E.T Bell**. এই বইতে সপ্তম অধ্যায় পুরোটা উৎসর্গ করেছেন একজন মানুষকে যাকে তিনি বলেছেন **'Master of all trades'**. মানুষটা গটফ্রেড উইলিয়াম লিবনিজ। লিবনিজ ২০ বছর বয়সে পিএইচডি শেষ করেন। গণিত, সাহিত্য, ধর্মতত্ত্ব, দর্শন, আইন—সব বিষয়ে তিনি দারুণ দক্ষ ছিলেন।

লিবনিজের জীবনের একটা বড় সময় কেটেছে ইউরোপের বিভিন্ন জায়গায় জার্মানির কূটনৈতিক দূত হিসেবে ভ্রমণ করে। ১৬৭২ সালে এমনই এক ভ্রমণে তিনি গেলেন প্যারিসে। ওখানে গিয়ে পরিচয় হয় হাইগেন্সের সাথে, তখন বয়স ২৬ বছর। সে সময় তার বিজ্ঞানবিষয়ক সত্যিকারের কাজগুলো শুরু হয়। লিবনিজ চাইতেন সবকিছুকে স্বয়ংক্রিয় বানাতে যেন যন্ত্রই হিসাব কষতে পারে। তিনি কিছু নিয়ম বলে দেবেন, যন্ত্রটা নিয়ম মেনে কাজ করে যাবে (ঠিক এখনকার প্রোগ্রামিংয়ের মতো)। তিনি তৈরি করলেন একটা বড় ক্যালকুলেটিং মেশিন। লিবিনিজের যুক্তিবিদ্যা আর প্রতীক নিয়েও আগ্রহ ছিল অনেক। হাইগেন্সের উৎসাহে তিনি সমসাময়িক বিজ্ঞানকে প্রতীক আর যুক্তিবিদ্যা দিয়ে সাজানোর চেষ্টা করলেন। ক্যালকুলাসের আবিষ্কার হলো সেই সময়টাতেই। ১৬৮৪ সালে তিনি ক্যালকুলাসের ওপর তার করা কাজগুলো প্রকাশ করলেন। আমরা এখন যে d/dx প্রতীক দেখি কিংবা ইন্টিগ্রেশনের '∫' চিহ্ন, সে সবই লিবনিজ থেকে পাওয়া। ডিফারেন্সিয়েশনের যে সূত্রগুলো আমরা শিখি, সেগুলোও লিবনিজ থেকে পাওয়া।

অধ্যায় ৩

ফাংশনের সীমা (Limit of a Function)

'সবকিছুরই একটা সীমা আছে' —বাংলা সিনেমার এই ডায়লগটি ঠিক নয়

৩.১ সীমার ধারণা

ছোট্ট করে বলি- লিমিট বা সীমা হলো গণিতের এক দারুণ বুদ্ধি! ইনপুটে কোনো একটা সংখ্যার কাছে যেতে থাকলে আউটপুট অর্থাৎ ফাংশনের মানটা কোন সংখ্যার কাছাকাছি যেতে থাকে, সেটা লিমিট দিয়ে বলে দেয়া যায়। ঠিক ঠিক ঐ ইনপুটের জন্য ফাংশনের মান থাকুক আর না থাকুক!

এবারে ব্যাখ্যা করা যাক!

কিছু কিছু ফাংশন আছে যারা আমাদের বেশ ঝামেলায় ফেলে দেয়। আমরা যদিও বুঝ পারি, মান কত হওয়া 'উচিত' , কিংবা কত 'হতে চলেছে' , তবু জোর দিয়ে ফাংশনের মান (functional value) বলতে পারি না। সেই

ঝামেলাগুলো থেকে মুক্তি দিতেই লিমিট ব্যাপারটার উদ্ভব। যেমন একটা ফাংশন চিন্তা করা যাক—

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

এই ফাংশনে x-এর মান 3 হলে ফাংশনটার মান কত হবে? 3 বসালে ওপরে হয় $3^2 - 9 = 0$, নিচে হয় $3 - 3 = 0$। উপরেও শূন্য, নিচেও শূন্য! এই $\frac{0}{0}$ এর মান কত সেটা আমরা বলতে পারি না। কেন? সেই কারণটা বোঝা কঠিন নয়। $\frac{15}{3}$ কথাটার মানে হলো 3 কে কত দিয়ে গুণ করলে 15 হয়। কত দিয়ে? 5 দিয়ে। তাহলে $\frac{15}{3} = 5$। একইভাবে $\frac{24}{4}$ মানে হলো 4-কে কত দিয়ে গুণ দিলে 24 হয়। সেটা হলো 6। তাহলে $\frac{24}{4} = 6$। তাহলে $\frac{0}{0}$ মানে হলো 0-কে কত দিয়ে গুণ দিলে 0 হয়। এখন দেখো, 0 কে 1 দিয়ে গুণ করলেও 0 হয়, 2 দিয়ে গুণ করলেও শূন্য হয়। এমন 3, 4, 5, 6 যা দিয়েই গুণ করা যাক, শূন্যই হয়। তাহলে $\frac{0}{0}$ এর মান 1, 2, 3, 4, 5 সবকিছুই হতে পারে! কিন্তু সেটা তো ভালো কিছু হলো না। মনে আছে তো, ফাংশনের মূল শর্তই ছিল একটা ইনপুটের জন্য হরেকরকম আউটপুট হওয়া চলবে না। তাহলে $\frac{0}{0}$ এর মান কত আমরা নিশ্চিত করে নির্ণয় করতে পারছি না। এমন $\frac{0}{0}$ আকারকে বলে অনির্ণেয় আকার (Indeterminate form)। এরকম অনির্ণেয় আকার আরও বেশ কিছু আছে। সবগুলোর তালিকা এখানে দিচ্ছি।

মনে রেখো - অনির্ণেয় আকার হলো এই সাতটি-

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 0 \times \infty$$

এই আকারগুলোর প্রত্যেকেই নানান রকম মান দেয়। আসল মান কত সেটা তখন শুধু ফাংশনের ধারণা থেকে আর বের করা যায় না। এমন আকার পেলেই আমাদের সাহায্য নিতে হয় লিমিটের।

যাহোক আমরা আমাদের ফাংশন $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ এর কাছে ফিরে যাই। আমরা দেখতে পেলাম x-এর মান যখন 3 তখন এই ফাংশন আমাদের $\frac{0}{0}$ এর মতো একটা অনির্ণেয় আকার দিচ্ছে। কিন্তু এটার মান কত 'হতে যাচ্ছিল', সেটা কী চিন্তা করা যায়? চেষ্টা করে দেখা যাক। 3 তো ইনপুট দিতে পারি না, 3 এর খুব কাছাকছি কোনো মান দিয়ে দেখি কত পাওয়া যায়। আমরা দেখি,

3-এর একটু আগে থেকে শুরু করে এগিয়ে *3*-এর কাছে যাই

x	2.99	2.999	2.9999
$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$	5.99	5.999	5.9999

3-এর একটু পরে থেকে শুরু করে পিছিয়ে *3*-এর কাছে আসি

x	3.01	3.001	3.0001
$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$	6.01	6.001	6.0001

অর্থাৎ x-এর মান 3-এর কাছাকাছি কিছু দিলে পুরো ফাংশনের মানটা 6-এর কাছাকছি থাকছে! আমরা 3-এর একটু আগে থেকে শুরু করে 2.999, 2.9999 এভাবে যত 3-এর দিকে আগাচ্ছি, পুরো ফাংশনের মানটা 5.999, 5.9999 এভাবে 6-এর দিকে আগাচ্ছে। আবার 3-এর একটু পর থেকে শুরু করেও যদি 3.001, 3.0001 এভাবে আমরা একটু করে কমে

কমে 3-এর দিকে সরে আসি, পুরো ফাংশনের মানটা কমে কমে সেই 6-এর দিকেই যাচ্ছে!

এখন আমরা বুঝতে পারছি x-এর মান 3 হলে ফাংশনটার মান কত হওয়া উচিত ছিল। নিশ্চয়ই 6। কিন্তু সেটা হতে পারছে না, কারণ ওপরে-নিচে শূন্য হয়ে যাচ্ছে। কিন্তু এই যে আমরা বুঝতে পারছি যে এটা আর কোনো সংখ্যা না, ঠিক 6-এর দিকেই আগাচ্ছে, এটাকে তো গণিতবিদেরা অস্বীকার করতে পারেন না! তাই তারা নতুন এক গণিতের জন্ম দিলেন। আবিষ্কৃত হলো লিমিট।

এবার তারা লিখলেন এভাবে

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

এর মানে হলো x-এর মান যখন 3-এর 'খুউউউব কাছাকাছি' পৌঁছাবে, তখন $\frac{x^2-9}{x-3}$ ফাংশনটার মান যে সংখ্যাটার 'খুউউউব কাছাকাছি' পৌঁছাবে সে হলো 6। এটা খুব নিরাপদ কথা। x-এর মান সরাসরি 3 বসালে অনির্ণেয় হয়ে যায়, 3 এর খুব কাছাকাছি দিতে তো আর আপত্তি নেই। অর্থাৎ 3 হলে ফাংশনের মান কত হয়, সে বিতর্কে আমরা যাব না, আমরা বলব 3-এর কাছে গেলে ফাংশনটা 6-এর কাছে যাবে। কী দারুণ একটা চিন্তা, তাই না?

একটা ব্যাপার খেয়াল করো, এখানে 3-এর একটু আগে থেকে শুরু করে 3-এর দিকে গেলেও যেমন ফাংশনটার মান 6-এর কাছে যায়, আবার 3-এর একটু পরে থেকে শুরু করে কমে কমে 3-এর কাছে এলেও ফাংশনটা ঠিক সেই 6-এর কাছেই এগিয়ে আসে। অর্থাৎ দুই দিক এগোলেই মানটা 6-এর কাছে যাচ্ছে।

কিন্তু কিছু কিছু ক্ষেত্র আছে যখন এমনভাবেও কোনো সুরাহা করা যায় না। যেমন $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$-এর কথা চিন্তা করো। x-এর মান শূন্য হলে নিশ্চিতভাবেই আমরা দেখতে পাচ্ছি, ওপরে 0, নিচেও 0, তাই এটা অনির্ণেয় আকার। সুতরাং লাগবে লিমিট। তাহলে আগের মতোই চিন্তা করি। x-এর মান 0-এর একটু আগে থেকে শুরু করে একবার 0-এর কাছাকাছি পৌঁছাই আর আরেকবার 0-এর একটু পরে থেকে শুরু করে কমে কমে 0 এসে পৌঁছাই। দেখি এতে ফাংশনের মান কেমন পাওয়া যায়।

0 এর একটু আগে থেকে শুরু করে এগিয়ে 0-এর কাছে যাই

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$\frac{\lvert -0.1\rvert}{-0.1}=\frac{0.1}{-0.1}=-1$	-1	-1	-1

0-এর একটু পরে থেকে শুরু করে পিছিয়ে 0-এর কাছে আসি

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$\frac{\lvert 0.1\rvert}{0.1}=\frac{0.1}{0.1}=+1$	1	1	1

অর্থাৎ এরা বড়ই বেয়াড়া। শূন্যের আগের যেকোনো সংখ্যার জন্যই পাওয়া গেল -1 আর শূন্যের পরের যেকোনো সংখ্যা জন্যে পাওয়া গেল $+1$। এরা একটা জায়গায় মিলতে পারল না। আগেরবার যেমন 3-এর জন্য আগে পরে দুই ক্ষেত্রেই তারা 6-এই পৌঁছেছিল, এখন সেটা হলো না। এ অবস্থায় আমরা বলি যে এখানে লিমিটের অস্তিত্ব নেই। তার মানে সবকিছুরই একটা সীমা

আছে, বাংলা সিনেমার এই বহুল প্রচলিত ডায়লোগ আসলে গণিতের জন্য ঠিক না!

এতক্ষণ যা যা আলোচনা করলাম তার ওপর ভিত্তি করে লিমিটের সহজ সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া যায়—

সংজ্ঞা - ধরা যাক $f(x)$ হলো বাস্তব সংখ্যার একটি ফাংশন, যেটি একটি ধ্রুব সংখ্যা a-এর সন্নিকটবর্তী সব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। x-এর মান a-এর নিকটবর্তী হলে ফাংশনটির মান যদি একটি বাস্তব সংখ্যা L-এর নিকটবর্তী হয়, তাহলে বলা যায়, $\lim_{x\to a} f(x) = L$।

নিচের অংশটুকু আগ্রহীদের জন্য, কম আগ্রহীরা চাইলে এটা বাদ দিয়ে লিমিটের কৌশলে চলে যেতে পারো। তবে সত্যিটা কী জানো, এই আধুনিক সংজ্ঞাটাও জানা উচিত। তাহলে বোঝা যায়, অতি সরলীকরণ কীভাবে মাঝে মাঝে আমাদেরকে দ্বিধায় ফেলে দিতে পারে।

৩.২ লিমিটের কড়াকড়ি সংজ্ঞা (PRECISE DEFINITION OF LIMIT)

একটু আগে যেই সংজ্ঞাটার কথা বললাম সেখানে একটা ঝামেলা আছে। ঝামেলাটা আগে দেখি চলো। অনুমান কর $\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x} = ?$

0-এর একটু আগে থেকে শুরু করে এগিয়ে 0-এর কাছে যাই

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$	0	0	0	0

0-এর একটু পরে থেকে শুরু করে পিছিয়ে 0-এর কাছে আসি

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$	0	0	0	0

দেখে মনে হচ্ছে দুদিক থেকেই ফাংশনটা 0-এর দিকে যাচ্ছে। তাহলে মনে হয় $\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x} = 0$। কিন্তু আসলে এটা ঠিক না! ফাংশনের ছবি দেখলে বোঝা যায় এটা খুব কাছাকাছি বারবার ওঠানামা করে এবং কোনো নির্দিষ্ট মান এখানে পাওয়া যায় না। অর্থাৎ এই লিমিট আসলে অস্তিত্বহীন। কিন্তু আমরা তো মান বসিয়ে বুঝতে পারলাম না। এমন অবস্থায় গণিতবিদেরা বুঝলেন, তাদের আরও কঠিন হতে হবে সংজ্ঞার ব্যাপারে। তারা বুঝলেন কাছাকাছি যাওয়া বা নিকটবর্তী হওয়া এই কথাগুলো গণিতে খুবই ভাসাভাসা ব্যাপার। ওপরের উদাহরণে x-এর মান 0.1 না নিয়ে 0.12 নিলেই আর 0 আসত না। এই যে আমরা বলছি, x-এর মান a এর কাছে গেলে ফাংশনের মান L-এর কাছে যাবে। x-এর মান কতটা a-এর কতটুকু কাছে গেলে $f(x)$-এর মান L-এর কতটুকু কাছে যাবে?

একটা সমস্যা ভাবা যাক। ধরি, $f(x) = 4x + 5$। বের করতে হবে $\lim_{x\to 2} f(x)$-এর মান কত। এমনিতে দেখলে অনুমান করা যায় x-এর মান

2-এর কাছে গেলে ফাংশনটার মান 13-এর কাছে যাবে। কিন্তু গাণিতিকভাবে নিশ্চিত হব কী করে? এটার জন্য আমরা অন্য একটা প্রশ্ন করি—

আমি চাই $f(x)$ –এর মান 13-এর থেকে মাত্র 0.1 দূরত্বের ভেতরে থাকুক, এরকম হতে গেলে x কে 2-এর কতটুকু কাছে থাকতে হবে?

তাহলে আমরা আসলে একটা সংখ্যা δ খুঁজে বের করতে চাই যেন, যখনই x থেকে 2-এর দূরত্বটা δ-এর কম হয়, তখনই ফাংশনের মান থেকে 13-এর দূরত্বটা 0.1-এর কম হয়। $f(x)$ থেকে 13-এর দূরত্বকে লেখা যায় $|f(x) - 13|$ আর x থেকে 2-এর দূরত্বকে লেখা যায় $|x - 2|$। সমস্যাটাকে এখন লেখা যায় এভাবে-

এমন একটি δ খুঁজে বের করো যেন,
যখনই $|x - 2| < \delta$ হয়, তখনই $|f(x) - 13| < 0.1$ হয়।

আমরা চাই না x-এর মান সরাসরি 2 হোক, এটা এড়ানোর জন্যই লিমিটের শুরু হয়েছিল। তাই $|x - 2| = 0$ হওয়া যাবে না। 0 থেকে বড় হতে হবে। তাহলে এই ব্যাপারটাকে অন্তর্ভুক্ত করে সমস্যাটাকে আবারও এভাবে লিখতে পারি—

এমন একটা সংখ্যা δ খুঁজে বের করো যেন,
যখনই $0 < |x - 2| < \delta$ হয়, তখনই $|f(x) - 13| < 0.1$ হয়।

এতক্ষণ সমস্যাটাকে সাজিয়ে বললাম, এবারে সমাধানটা ভাবা যাক। কীভাবে এমন একটা δ খুঁজে বের করা যাবে? এখানে একটু বুদ্ধি লাগবে। খেয়াল করো, $|f(x) - 13| = |4x + 5 - 13| = |4x - 8| = 4|x - 2|$। আমরা চাই এটার মান 0.1-এর ছোট হোক। কখন $4|x - 2| < 0.1$ হবে? যখন $|x - 2| < \frac{0.1}{4}$ হবে, অর্থাৎ $|x - 2| < 0.025$ হবে। ব্যস, আমরা কিন্তু পেয়ে গেছি, যা খুঁজছিলাম! δ-এর মান হবে 0.025। আমরা বলতে পারি,

যখনই $0 < |x - 2| < 0.025$ হয়, তখনই $|f(x) - 13| < 0.1$ হয়।

তুমি যদি আরেকটু ভালো করে তাকাও দেখতে পাবে এই অঙ্কে δ হয়েছে 0.1-এর 4 ভাগের একভাগ, ফাংশনটাতে $4x$ থাকার জন্য। যদি মূল সমস্যায় 0.1 না থেকে 0.01 থাকত, তখনো একইভাবে ভাবা যেত। δ হতো $\frac{0.01}{4} = 0.0025$ বলা যেত,

যখনই $0 < |x - 2| < 0.0025$ হয়, তখনই $|f(x) - 13| < 0.01$ হয়।

যদি 0.001 না থেকে 0.0001 হতো, δ হতো $\frac{0.001}{4} = 0.00025$। বলতাম—

যখনই $0 < |x - 2| < 0.00025$ হয়, তখনই $|f(x) - 13| < 0.0001$ হয়।

এই যে 0.1, 0.01, 0.001 সংখ্যাগুলো—এগুলো হলো আমরা লিমিটের মানের কত কাছে যেতে চাই সেই ব্যাপারটা। এদের ফরাসি গণিতবিদ কশি নাম দিয়েছিলেন ε। কারণ এটি ফরাসি শব্দ erreur (ইংরেজিতে error, ত্রুটি)-এর প্রথম অক্ষর।

এখন আমরা দেখছি ε যা-ই দেওয়া হোক তার জন্যই আমরা একটা δ বের করতে পারছি, আমাদের উদাহরণে সেই δ হচ্ছে ε এর 4 ভাগের একভাগ, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$।

যখনই $0 < |x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$ *হয়, তখনই* $|f(x) - 13| < \varepsilon$ *হয়।*

এটার ওপর ভিত্তি করে গণিতবিদেরা লিমিটের আরও নিখুঁত করে সংজ্ঞা দিলেন, যেটাকে δ, ε সংজ্ঞা বলে। এটিই লিমিটের আধুনিক সংজ্ঞা। সংজ্ঞাটা দেখতে বেশ প্যাঁচানো, তবে এতক্ষণ যা বলেছি সেগুলো দেখে থাকলে ধারণা করতে পারবে। পরে আরেকটু ব্যাখ্যা করব। আপাতত সংজ্ঞাটার দিকে তাকাও।

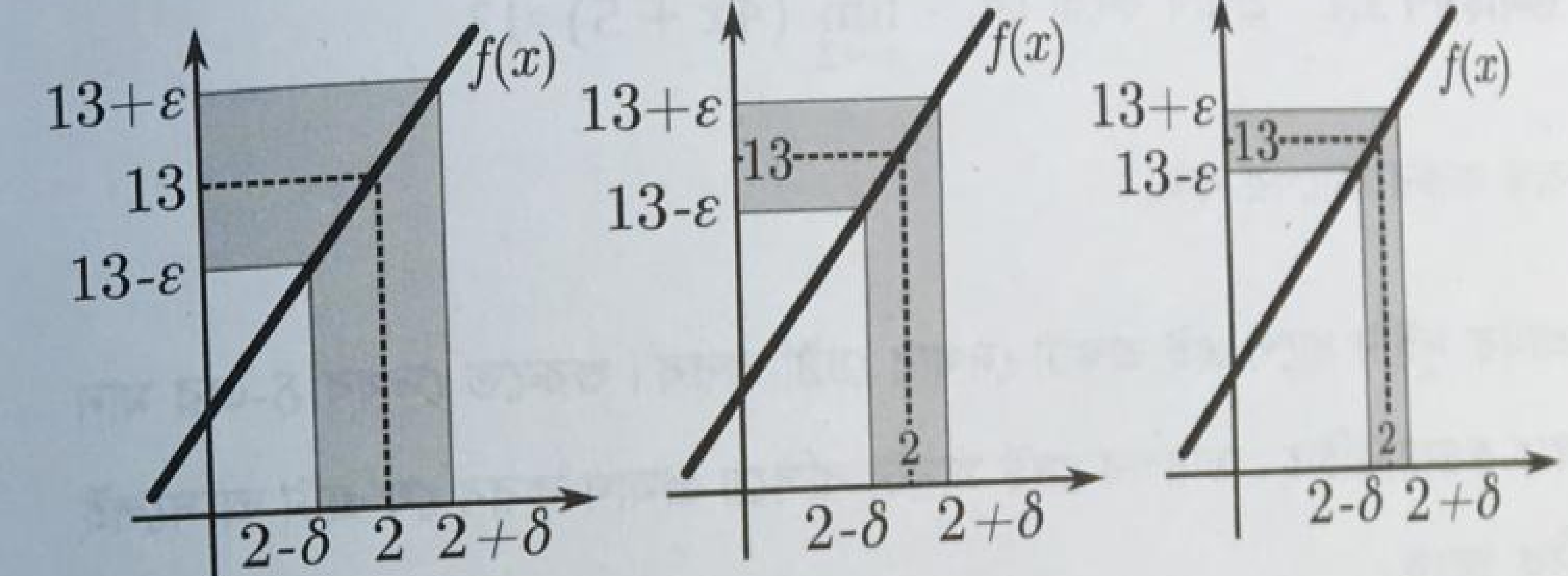
সংজ্ঞা - ধরা যাক $f(x)$ বাস্তব সংখ্যার একটি ফাংশন, যেটি কোনো সংখ্যা a এর সন্নিকটবর্তী সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। আমরা বলতে পারি, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ হবে যদি,

প্রতিটি ধনাত্মক ε এর জন্য আনুষঙ্গিক একটি ধনাত্মক δ এর অস্তিত্ব পাওয়া যায় যেন-

যখনই $0 < |x-a| < \delta$ হয়, তখনই $|f(x) - L| < \varepsilon$ হয়।

ওরে বাবা, এগুলো কী কথা! আমি জানি, অনেকেই ঘাবড়ে গেছ এই সংজ্ঞা দেখে। বড় বড় কঠিন জিনিস থাকলে কী করতে হয়, জানো? divide & conquer। ছোট ছোট করে ভাগ করে নিয়ে জয় করো। এই নীতিতেই এককালে নিষ্ঠুর ব্রিটিশরা সারা ভারতবর্ষ জয় করে ফেলেছিল। আমরাও এখানে তা-ই করব।

আগের উদাহরণটা থেকে খেয়াল করো, $0 < |x-2| < \delta$ থেকে বলা যায় $2 - \delta < x < 2 + \delta$, $x \neq 2$। আর $|f(x) - 13| < \varepsilon$ থেকে বলা যায় $13 - \varepsilon < x < 13 + \varepsilon$। তার মানে x এর মানটা যখনই $2 - \delta$ থেকে $2 + \delta$ এর মাঝে থাকে (এবং $x \neq 2$ হয়), তখনই $f(x)$ এর মানটা $13 - \varepsilon$ থেকে $13 + \varepsilon$ এর মাঝে থাকে। ছবি থেকে খেয়াল করো,



ভুজে দেখো δ-এর মান ছোট হতে থাকা মানে x-এর মান 2-এর কাছে পৌঁছে যেতে থাকা এবং সেটা 2-এর আগে-পরে দুদিক থেকেই। কারণ $2 - \delta$ বোঝাচ্ছে 2-এর একটু আগে, আর $2 + \delta$ বোঝাচ্ছে একটু পরে। ওদিকে কোটিতে তাকাও, ভুজে δ-এর মান ছোট হতে থাকলে কোটিতে ε ও ছোট হতে থাকে। ε এর মান ছোট হতে থাকা মানে $f(x)$ এর মান L এর কাছে পৌঁছে যেতে থাকা। ছবিটাকে ভিডিওর মতো করে ভাবো। x অক্ষে δ-এর এলাকা যত ছোট হচ্ছে এবং পুরো এলাকাটা a-তে কেন্দ্রীভূত হচ্ছে, y অক্ষে ε-এর এলাকা যত ছোট হচ্ছে এবং পুরো এলাকাটা L-এ কেন্দ্রীভূত হচ্ছে।

এবারে দেখো তো সংজ্ঞাটা কী বলছে?

বলছে, আমি L বিন্দুর আশপাশে ফাংশনের মানগুলো লিমিট থেকে কত দূরে হতে পারবে তার সর্বোচ্চ মানটা মানটা নির্ধারিত করে দেব, সেটাই ε। এই

ত্রুটি ε-এর বেশি হওয়া যাবে না, $|f(x) - L| < \varepsilon$। তুমি কি বলতে পারবে এই নির্দিষ্ট ত্রুটির কম পেতে গেলে x-এর মানটা a এর কত কাছাকাছি হতে হবে, অর্থাৎ δ কত হতে হবে? শুধু একবার পারলেই হবে না। সর্বোচ্চ ত্রুটি আমি যা-ই দিই, তুমি কি প্রতিবার δ কত হবে বলতে পারবে? যদি তুমি বলতে পারো, তাহলে লিমিট আছে, নইলে নেই!

উদাহরণ 3.1 প্রমাণ করো যে, $\lim\limits_{x\to 2} (4x+5) = 13$

অঙ্ক শুরুর আগের কথা:

আমরা দুইটা ধাপে এই অঙ্কটা দেখার চেষ্টা করব। শুরুতে দেখব δ-এর মান কত হওয়া উচিত। তারপর সেই মানটা বসিয়ে প্রমাণ করব যে এটা আসলেই ঠিক আছে।

সমাধান:

ধাপ ১ (δ-এর মান অনুমান):

ধরি ε একটি পূর্বনির্ধারিত ধনাত্মক সংখ্যা, আমাদের একটা δ খুঁজে বের করতে হবে যেন—

যখনই $0 < |x-2| < \delta$ হয়, তখনই $|(4x+5) - 13| < \varepsilon$ হয়।

লক্ষ করো $|(4x+5) - 13| = |4x-8| = 4|x-2|$

তার মানে আমরা চাই,

যখনই $0 < |x-2| < \delta$ হয়, তখনই $4|x-2| < \varepsilon$ হয়।

বা, „ „ „ „ $|x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$ হয়

এখান থেকে অনুমান করা যায় যে, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ধরতে হবে।

ধাপ ২ (এখানে দেখানো হবে যে ওই δ আসলেই কাজ করে)

দেওয়া আছে, $\varepsilon > 0$, ধরি, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

যখন $0 < |x-2| < \delta$, তখন $|(4x+5) - 13|$ -এর মান নির্ণয় করি।

$|(4x+5) - 13| = 4|x-2| < 4\delta$ [যেহেতু $|x-2| < \delta$]

$< 4.\frac{\varepsilon}{4}$

$< \varepsilon$

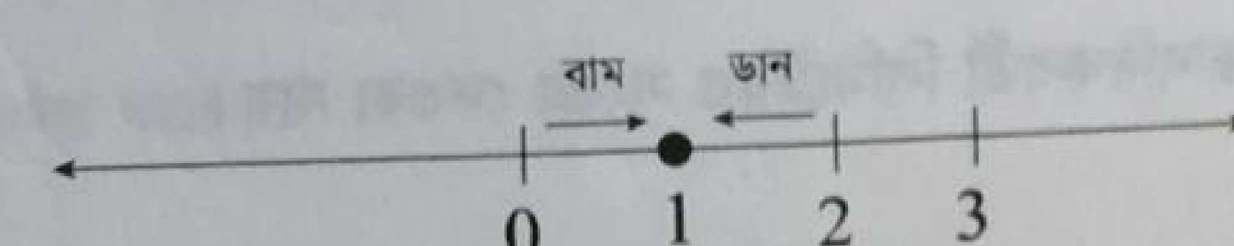
অর্থাৎ, $|(4x+5) - 13| < \varepsilon$

প্রতিটি ε এর জন্য আমরা এমন δ বের করতে পারি যেন,

যখন $0 < |x-2| < \delta$, তখন $|(4x+5) - 13| < \varepsilon$ হয়। তাহলে লিমিটের সংজ্ঞামতে, $\lim\limits_{x\to 2} (4x+5) = 13$

৩.৩ একদিকবর্তী লিমিট

একটু আগে আমরা বলেছিলাম লিমিটের অস্তিত্ব থাকতে হলে দুদিক থেকেই এগিয়ে একই জায়গায় যেতে হয়। এই যে দুটো দিক, টা সংখ্যারেখা কল্পনা করলে ভালো করে বোঝা যায়।



মনে করো, $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$-এর মান বের করতে হবে। যখন আমরা 1-এর একটু আগে অর্থাৎ 1-এর বামপাশ থেকে বেড়ে 1-এর দিকে আগাই, তখন যে লিমিট পাওয়া যায় তাকে বলে বাঁহাতি লিমিট (left handed limit) এবং যখন ডানদিক থেকে কমে 1-এ পৌঁছাই তাকে বলে ডানদিকবর্তী লিমিট (right handed limit) ।

বামদিকবর্তী হলে লেখা হয় এভাবে,

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

ডানদিকবর্তী হলে লেখা হয় এভাবে,

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

সাধারণভাবে সংজ্ঞা দেওয়া যায় এমন করে,

<u>বামদিকবর্তী লিমিট:</u>

x যতই সংখ্যারেখায় a-এর বাম দিক থেকে a-এর দিকে অগ্রসর হয়, $f(x)$-এর মান যদি ততই L-এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন বলা হয় $f(x)$-এর বামদিকবর্তী লিমিট হলো L বা $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

δ, ε সংজ্ঞা থেকে বলা যায় এভাবে $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ হবে যদি প্রতিটি $\varepsilon>0$-এর জন্য এমন $\delta > 0$ পাওয়া যায় যেন, যখনই $a-\delta < x < a$ হয়, তখনই $|f(x)-L| < \varepsilon$ হয়।

অনুরূপভাবে ডানদিকবর্তী লিমিটেরও সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

মনে রেখো - লিমিটের অস্তিত্ব থাকতে হলে ডানদিকবর্তী ও বামদিকবর্তী লিমিট পরস্পর সমান হতে হবে।

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ হলে $\lim_{x\to a^-} f(x)= \lim_{x\to ac^+} f(x)=L$ হতে হবে।

৩.৪ লিমিটের সূত্রাবলি

ধরা যাক k একটি ধ্রুবরাশি, $\lim_{x\to a} f(x)$ আর $\lim_{x\to a} g(x)$ দুটোরই অস্তিত্ব আছে। তাহলে,

মনে রেখো –

১। যোগসূত্র: $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

২। বিয়োগসূত্র: $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

৩। গুণসূত্র: $\lim_{x\to a}[f(x)*g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$

৪। ভাগসূত্র: $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$; যখন $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

৫। স্কেলিং: = $\lim_{x\to a}[kf(x)] = k \lim_{x\to a} f(x)$

তার মানে যদি একই বিন্দু a-তে লিমিটের কথা চিন্তা করা হয়, দুটো ফাংশন যোগ করে লিমিট নিলে যা পাওয়া যাবে, আলাদা করে লিমিট নিয়ে যোগ করলেও একই মান পাওয়া যাবে। সেটা বিয়োগ, গুণ, ভাগের জন্যও সত্য। ভাগের জন্য ছোট একটা শর্ত আছে, ওই বিন্দুতে হরের ফাংশনের লিমিট শূন্য হওয়া যাবে না।

খুব খেয়াল: লিমিটের এই সূত্রগুলো ব্যবহার করে আলাদা করে লিমিট নিতে গিয়ে যদি দেখা যায় অনির্ণেয় আকৃতি চলে এসেছে, তখন আর আলাদা না করে একসাথেই হিসাব করতে হয়।

যেমন: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+3)^2}{x^3}$

এটাকে আলাদা করে $\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)^2}{\lim\limits_{x\to\infty} x^3}$ করে ভাবতে গেলে বিপদ; কারণ ওপরে-নিচে $\frac{\infty}{\infty}$ আকৃতি চলে আসবে। এমন ক্ষেত্রে আলাদা করে লিমিট নেওয়া যাবে না।

<u>আরও কিছু সূত্র:</u>

৬। $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$, যখন n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

এটা আসলে গুণের সূত্রটি বারবার প্রয়োগ করলেই চলে আসে।

৭। $\lim\limits_{x\to a} c = c$

x-এর যেকোনো মানের জন্যই $f(x)$ ধ্রুবক। যেদিক থেকেই a-এর কাছে যাই $f(x)$ নড়বে না। লিমিটও তাই c।

৮। $\lim\limits_{x\to a} x = a$

$f(x) = x$-কে বলে অভেদ ফাংশন। x-এর মান যা ফাংশনের মানও তা-ই। x, a-এর দিকে গেলে $f(x)$ও a-এর দিকেই যাবে।

৯। $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, [৬ নং সূত্রে $f(x) = x$ বসালে এটা পাব]

১০। $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, n \in N$; যদি n জোড় হয়, a-কে ধনাত্মক ধরে নিতে হবে।

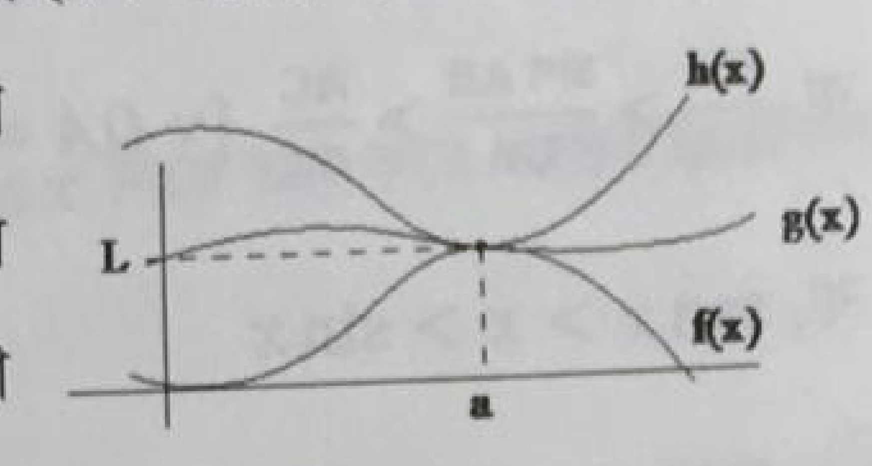
১১। $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

৩.৫ স্যান্ডউইচ উপপাদ্য

এটা নামের মতই সুস্বাদু একটা উপপাদ্য। চলো বিবৃতিটা পড়ি, তারপর বোঝাব।

উপপাদ্য ৩.৪ (স্যান্ডউইচ উপপাদ্য)
a-এর নিকটবর্তী x-এর সব মানের জন্য যদি $f(x) \le g(x) \le h(x)$ সম্পর্কটা খাটে এবং যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ হয়, তাহলে $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$।

দেখো, স্যান্ডউইচে দুটো পাউরুটির মধ্যে থাকে একটা মাংসের টুকরো। এখানে দুটো ফাংশনের মাঝে আছে আরেকটা ফাংশন। যদি দেখা যায় কোনোএকটা বিন্দুতে ওপরের ফাংশন $[h(x)]$ আর নিচের ফাংশন $[f(x)]$ দুটোতেই x-এর মান a-তে পৌঁছালে তাদের সীমা L-এ যায়, তখন মাঝের ফাংশনটা একরকম চাপা খেয়ে সে-ও L-এ পৌঁছায়। ছবিতে $g(x)$-এর দিকে দেখো a বিন্দুতে বেচারা ফাংশনের কী হাল! উপরে $h(x)$, আর



নিচে $f(x)$ দুটি ফাংশনের মানই L এ যাচ্ছে, তাহলে মাঝের $g(x)$ এর L এ যাওয়া ছাড়া গতি নাই।

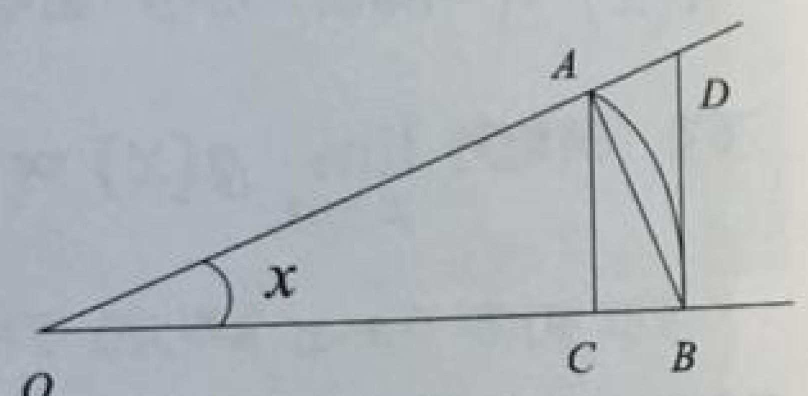
স্যান্ডউইচ উপপাদ্যের ব্যবহার:

উদাহরণ 3.2 প্রমাণ করো যে,

১। $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

২। $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

১। x কোণের মান শূন্যের কাছাকাছি হলে তাকে আমরা সূক্ষ্মকোণ চিন্তা করতে পারি। আমরা শুরুতে ডানদিকবর্তী লিমিট ধরে নিয়ে ভাবি। অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$ কত সেটি আমরা বের করতে চাই।



O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ AB আঁকি যা কেন্দ্রে x কোণ উৎপন্ন করে। A থেকে OB-এর ওপর লম্ব AC আঁকি।

ছবি থেকে, $\mathrm{BD} >$ বৃত্তচাপ $\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$

বা, $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{OA}} > \frac{\text{চাপ AB}}{\mathrm{OA}} > \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}$

বা, $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{OA}} > \frac{\text{চাপ AB}}{\mathrm{OA}} > \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}$ [$\because OA = OB =$ ব্যাসার্ধ]

বা, $\tan x > x > \sin x$

বা, $\frac{\tan x}{\sin x} > \frac{x}{\sin x} > \frac{\sin x}{\sin x}$

বা, $\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1$

বা, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ [যেহেতু সব রাশি ধনাত্মক, ব্যস্তকরণ করে পাই]

এবারে লক্ষ করো, $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$ এবং $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

তাহলে স্যান্ডউইচ উপপাদ্য থেকে মাঝেরটাও হবে 1।

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{\sin x}{x}$ একটি জোড় প্রতিসম (even function) ফাংশন। $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ হলে, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$।

এটা তেমন কোনো কঠিন ব্যাপার না। এর অর্থ হলো x-এর মান $+a$ বসালে ফাংশনের মান যা পাওয়া যাবে $-a$ বসালেও একই মান পাওয়া যাবে। ফলে বামদিকবর্তী লিমিটও হবে ডানের মতো। সেখান থেকে বলা যায় $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1$। আর এ দুটো সমান হলে একসাথে বলা যায় $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$।

২। $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x}\right] = 1\cdot 1 = 1$

চাইলে ওপরে পাওয়া অসমতাতে $\cos x$ দিয়ে ভাগ করে স্যান্ডউইচ উপপাদ্য ব্যবহার করা যায়।

বা,$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

বা, $\frac{\cos x}{\cos x} < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x}$

বা, $1 < \frac{\tan x}{x} < \sec x$

আবার স্যান্ডউইচ উপপাদ্য থেকে ভাবা যায়, $\lim_{x\to 0} \sec x = 1$ এবং $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ হওয়ায় $\frac{\tan x}{x}$ এর সীমান্তিক মানও হবে 1।

৩.৫ লিমিটের অঙ্ক করার কৌশল

৩.৫.১ কৌশল ১: সরাসরি মান বসানো

ছোট্ট করে বলি - যদি মান বসালে অনির্ণেয় আকার না আসে, তাহলে মান বসিয়ে দাও। খেল খতম!

এটা হলো সবচেয়ে সহজ এবং সবচেয়ে জরুরি কৌশলগুলোর একটা। ফাংশনের মান অনির্ণেয় হয়ে গেলে কী করা হবে সেটার চিন্তা থেকেই আমরা লিমিট শুরু করেছিলাম। এখন যদি ফাংশনের মান থাকেই তাহলে তো আমরা নিশ্চিন্ত। $f(x) = x + 4$ এই ফাংশনের জন্য চিন্তা করো। ধরো আমরা $x \to 2$ এর জন্য লিমিট বের করতে চাই। দেখেই ধারনা করা যায়, x এর মান 2 এর কাছে গেলে ফাংশনটার মান 6 এর কাছেই যাবে। ফলে এই 6 পাওয়ার জন্য f(2) বের করলেই হয়। একটা উদাহরণ দেখি চলো, তারপর বলবো - এটা কখন ব্যর্থ হতে পারে!

উদাহরণ 3.3 $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+9}{x+3}$ এর মান বের করো।

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+9}{x+3} = \frac{3^2+9}{3+3} = \frac{18}{6} = 3$$

উদাহরণ 3.4 $\lim_{x\to 2}(5x+9) = 5 \cdot 2 + 9 = 10 + 9 = 19$

কী আরামের অঙ্ক, তাই না। তবে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই এমন আরামের সমস্যা থাকবে না। আবার আরেকটা সতর্কতাও জানা দরকার।

সতর্কতা:

যদি ফাংশনটি খণ্ড খণ্ড আকারে সংজ্ঞায়িত হয়, তখন সরাসরি মান বসানোর এই নিয়ম কাজ নাও করতে পারে! ধরো একটা ফাংশন এভাবে সংজ্ঞায়িত-

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{যখন } x < 2 \\ 10 & \text{যখন } x = 2 \\ x^3 - 2 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

তখন দেখা যাবে, x এর মান বাম থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হলে ফাংশন পৌঁছায় 6-এ, ডান থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হলেও মান পৌঁছায় 6-এ। বামদিকবর্তী আর ডানদিকবর্তী দুটো লিমিটই হবে 6 এর সমান, ফলে আমরা বলতে পারি $\lim_{x\to 2} f(x) = 6$ । কিন্তু এমনভাবে ফাংশনটার সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে যে ঠিক $x = 2$ এ ফাংশনটার মান 10। তাহলে সরাসরি মান নিলে এখানে আর ঠিক লিমিটটা পাওয়া যাচ্ছে না। সত্যি বলতে এই ধারণাটার সাথে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার ধারণা অঙ্গাঙ্গিভাবে জড়িত। কথা দিচ্ছি অবিচ্ছিন্নতা নিয়ে আমরা আবার আলোচনা করব (নবম অধ্যায় দ্রষ্টব্য)!

৩.৫.২ কৌশল ২: মূলদ ফাংশনের নিয়ম

ছোট্ট করে বলি - উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে কাটাকাটি করো!

উদাহরণ 3.5

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

শুরুতেই দেখো, আমরা পাশে বলে দিয়েছি এটা $\frac{0}{0}$ আকার। x এর মান লবে আর হরে আলাদা করে 3 বসিয়ে দেখেছি কত আসে। এখানে উপরে এবং নিচে দুটোতেই 0 পেয়েছি। এটা অনির্ণেয় আকার। যদি অনির্ণেয় না আসত, তাহলে প্রথম কৌশলের মতো ঠুস করে মান বসিয়ে দিতাম। অনির্ণেয় আসায় আমাদের ভাবতে হচ্ছে কীভাবে এটাকে সরানো যায়। তখন উপরে নিচে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার পর সে উৎপাদকটাকে কাটাকাটি করলাম যে আসলে লব আর হরকে শূন্য বানিয়ে দিচ্ছিল।

খেয়াল করো, $x \to 3$ মানে হলো x এর মান 3 এর কাছাকাছি যাবে, ঠিক 3 হবে না। তাই $(x-3)$ ঠিক শূন্য হবে না। এ কারণেই কাটাকাটি বৈধ।

একইভাবে-

উদাহরণ 3.6

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right].$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)$$

$$= (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$$

৩.৫.৩ কৌশল ৩: মূল ফাংশনের নিয়ম

ছোট্ট করে বলি – লবে হরে অনুবন্ধী দিয়ে গুণ করো

উদাহরণ 3.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})-(\sqrt{1-x})}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \qquad [\text{অনুবন্ধী দিয়ে গুণ করে}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

আগে খেয়াল করো এটাও $\frac{0}{0}$ আকৃতির। তাই সরাসরি মান বসিয়ে লাভ হচ্ছে না। এমন রুট ওয়ালা ফাংশন থাকলে ওপরে-নিচে অনুবন্ধী দিয়ে গুণ দিতে হয়। তখন $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ -ছেলেবেলার এই প্রিয় সূত্র আমাদের মুশকিল আসান করে দেবে।

৩.৫.৪ কৌশল ৪: অসীম সীমা ও মূলদ ফাংশন

ছোট্ট করে বলি – সবচেয়ে বড় ঘাত দিয়ে ভাগ করো!

উদাহরণ ৩.৪ ধরো আমরা বের করতে চাই এই লিমিটের মান: $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4}{(x+3)^3}$

শুরুতে খেয়াল করো এটা $\frac{\infty}{\infty}$ আকৃতির। এটাও আরেক রকম অনির্ণেয় আকার। এরকম ক্ষেত্রে ওপরে-নিচে x-এর সর্বোচ্চ ঘাত দিয়ে ভাগ করতে হয়। তখন যেটা হয়- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$ এইরকম আকৃতির জিনিসপত্র আমাদের সামনে চলে আসে। সেগুলোর মান হয় শূন্য কারণ x-এর মান অসীমে গেলে $\frac{1}{x}$ যায় শূন্যে। এটাই এখানে মূল বিষয়। তাই সবগুলো $\frac{1}{x}$ আকারে বানিয়ে নেওয়ার চেষ্টা করা হয়।

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4}{(x+3)^3} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4}{x^3+6x^2+12x+8}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}+\frac{12x}{x^3}+\frac{8}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{8}{x^3}}$$

$$= \frac{4+0}{1+0+0+0} = 4$$

৩.৫.৫ কৌশল ৫: ধারায় প্রকাশ

ছোট্ট করে বলি – ধারায় প্রকাশ করো, তারপর তাকাও উঁচু ঘাতওয়ালা পদগুলোর দিকে! দেখো কীভাবে ওরা নিঃশেষ হয়ে যায়!

কয়েকটা ধারা সম্পর্কে জানা থাকা বেশ জরুরি। এদের ভেতরে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হলো দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি।

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

এছাড়া e^x-এর ধারা এবং $\ln(1+x)$-এর ধারাগুলোও জানা দরকার।

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

উদাহরণ 3.9 দেখাও যে, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

সমাধান:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right)-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right)$$

$$= 1+0+0+0+\cdots = 1$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3.10 দেখাও যে, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

সমাধান:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\cdots+x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots + x \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right)$$

$$= 1-0+0-0+\cdots = 1$$ (প্রমাণিত)

এখানে দুটো অঙ্কেই খেয়াল কর $x \to 0$ হলে x এর উঁচু ঘাতওয়ালা পদগুলো শূন্য হয়ে যায়।

৩.৫.৬ কৌশল ৬: প্রতিস্থাপন

ছোট্ট করে বলি – অনেকসময় $x \to a$ এমন আকৃতি থাকলে $x - a = h$ ধরে নিলে সুবিধা হয়! তখন $h \to 0$ লিমিট বের করতে হয়, যেটা সহজসাধ্য হতে পারে।

উদাহরণ 3.11 দেখাও যে n এর মূলদ মানের জন্য $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$

খেয়াল কর, এখানে নিচে আছে $x - a$, আর লিমিট আছে $x \to a$। এগুলো আমাদেরকে ইঙ্গিত দিচ্ছে $x - a = h$ধরে নেয়ার। আর জ্ঞানী লোকের জন্য ইশারাই যথেষ্ট! চলো ধরে দেখা যাক কী পাই।

ধরি, $x - a = h$, তাহলে $x = a + h$

খেয়াল করো যখন x যাবে a-এর কাছে, তখন h যাবে শূন্যের কাছে। অর্থাৎ $x \to a$ হলে $h \to 0$।

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{a+h-a} \quad [\because x = a+h]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^n\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^n\left(1+\frac{nh}{a}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{h^2}{a^2}+\cdots+h \text{ এর উচ্চঘাত সম্বলিত পদ}\right) - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^n + nha^{n-1} + \frac{n(n-1)h^2}{2!}\cdot a^{n-2} + \cdots + h \text{ এর উচ্চঘাত পদ} - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(na^{n-1} + \frac{n(n-1)h}{2!}\cdot a^{n-2} + \cdots + h \text{ এর উচ্চঘাত পদ}\right)}{h}$$

$$= na^{n-1}$$ (প্রমাণিত)

৩.৫.৭ কৌশল ৭: ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোতে $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ হলো সবচেয়ে জরুরি সূত্র। যদি $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}$ থাকে, অনেক সময় $x - \frac{\pi}{2} = h$ প্রতিস্থাপন করলে সুবিধা পাওয়া যায়।

উদাহরণ 3.12 লিমিটের মান বের করো: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$

ধরা যাক, $x - \frac{\pi}{2} = h, \therefore\ x = \frac{\pi}{2} + h$

যখন, $x \to \frac{\pi}{2}, h \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} \quad \left[\because x = \frac{\pi}{2}+h\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{-\sin h}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{-2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin\frac{h}{2}}{\cos\frac{h}{2}} = -\lim_{h\to 0} \tan\frac{h}{2} = 0$$

উদাহরণ 3.13 লিমিটের মান বের করো: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

সমাধান: শুরুতে দেখো, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

খেয়াল করো, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$-থেকে আমরা লিখতে পারি, $\lim_{\frac{x}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$

$x \to 0$ হলে এমনিতেই $\frac{x}{2} \to 0$ হবে। এই অংশটুকু নিয়ে ভাবনা নেই। তাহলে, ওপরের $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ রাশিটিকে $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ আকারে সাজানোর চেষ্টা করতে হবে।

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2}{4}\lim_{x/2\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right. \quad [\because x\to 0 \text{ হলে } \frac{x}{2}\to 0]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1)^2=\frac{1}{2} \qquad [\because \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1]$$

৩.৬ অনুশীলনী

1. ক্যালকুলেটরে মান বসিয়ে বসিয়ে সীমার মান কত হবে অনুমান করো-

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(x-1)^2}{x^3}$$

2. (i) নিচের লাইনটি কি চাইলেই লেখা সম্ভব? না হলে কেন নয়?

$$\frac{x^2-16}{x-4}=x+4$$

(ii) সীমার মান বের করো- $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

(3 – 40) সীমার মান বের করো (যদি থাকে)

3. $\lim_{x\to -3}\frac{3-|x|}{3+x}$

4. $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

5. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+6}{x-2}$

6. $\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

7. $\lim_{t\to 0}(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t})$

8. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tan3x}$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^{-1}-3^{-1}}{x}$

12. $\lim_{x\to -4}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

13. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+3}{7x^3+4}$

14. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

15. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x^2+4x+1}$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x}$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

20. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$

21. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-\theta)^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$; [চিন্তাসূত্র: $y=\sin^{-1}x$]

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-\cos dx}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 4x}{\sin 5x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 9x}{4x^2}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x^2+x}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{4x^2-3}{x^2}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\tan 2x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

33. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\}$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}$

36. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

37. $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$

38. $\lim\limits_{x\to 0.5}\frac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

39. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

40. $\lim\limits_{t\to 9}\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

অধ্যায় ৪

ঢাল (slope) এর ধারণা

ছোট্ট করে বলি- ঢাল (slope) দিয়ে বোঝায় একটা ফাংশন বাড়ছে না কমছে। যদি বাড়ে কত দ্রুত বাড়ছে, কমলে কত দ্রুত কমছে!

খবরের শিরোনাম শেষ, এবারে বিস্তারিত! ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস বোঝার জন্য ঢাল খুবই খুবই জরুরি একটা ধারণা। ঢালের সঙ্গে জড়িয়ে আছে সরলরেখার ধারণা। আগে সেটা দেখা যাক।

৪.১ সরলরেখার সমীকরণ

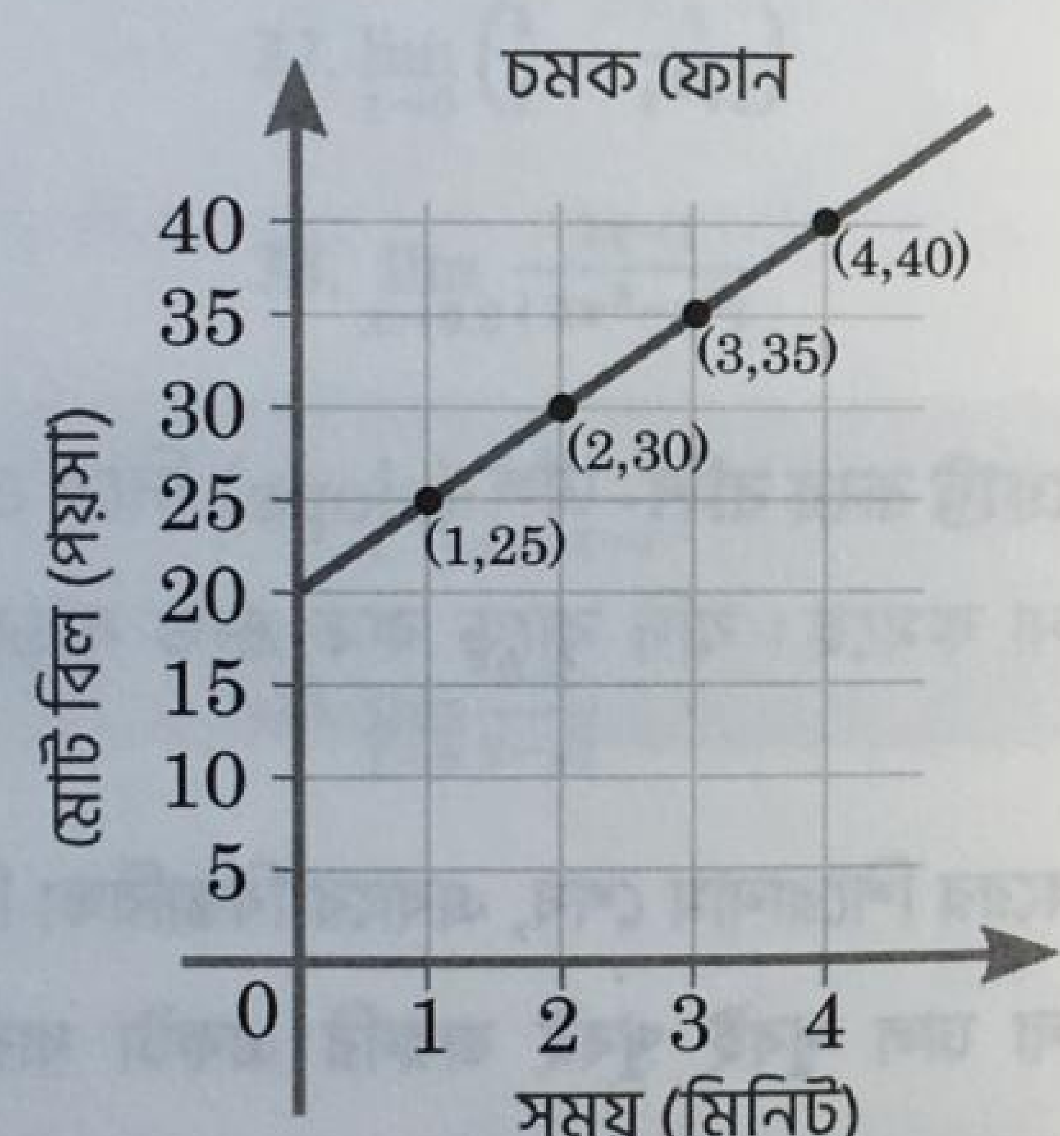
মনে করো, বাজারে নিয়ে এসেছি একটি স্পেশাল 'চমক ফোন' ! এই ফোনের বিশেষ বৈশিষ্ট্য কী? এর বৈশিষ্ট্য হলো কলরেট 5 পয়সা প্রতি মিনিট। (আমি খুব সহজেই অন্য অপারেটরদের হারিয়ে দেব, মুহাহাহা)।

আমি যেহেতু অত্যন্ত সংগীতপ্রেমী, এজন্য নিয়ম করেছি তোমাকে একটি কলার টিউন রাখতেই হবে। তার জন্য মাসে বিশ পয়সা করে দিতে হবে। এখন মাসের বিলটা কেমন হবে সেটা দেখার চেষ্টা করি। কেউ যদি x মিনিট কথা বলে তাহলে বিলটা কত হবে? যেহেতু প্রতি মিনিট 5 পয়সা এজন্য আমাদের $5x$ পরিমাণ বিল দিতে হবে। আর যেহেতু 20 পয়সা অতিরিক্ত দিতেই হবে কলার টিউনের জন্য, তাহলে আমাদের বিলটা হবে $5x + 20$।

এটা হলো আমার মোট বিল। এই মোট বিলটাকে আমরা যদি y দিয়ে প্রকাশ করতে চাই তাহলে আমরা একটা সমীকরণ পেয়ে যাচ্ছি-

$$y = 5x + 20$$

আমরা যদি এর একটা ছবি আঁকার চেষ্টা করি তাহলে ব্যাপারটা কেমন দেখাবে?



আমি যদি এক মিনিটও কথা না বলি, অর্থাৎ যদি 0 মিনিট কথা বলি, তাহলে আমার বিল কত হবে? 20 পয়সা, কলার টিউনের জন্য।

যদি আমি 1 মিনিট কথা বলি তাহলে আমার বিল কত আসবে? বিল আসবে= (20+5) পয়সা।

2 মিনিট কথা বললে বিল আসবে = (20+5+5) = 30 পয়সা, 3 মিনিট কথা বললে 35 পয়সা।

আমি যদি এই বিন্দুগুলোকে যুক্ত করি, তাহলে একটি সুন্দর সরলরেখা দাঁড়াবে। এই যে এমন সব সম্পর্ক যাদের বিন্দুগুলো যোগ করলে সুন্দর সরলরেখা হয়ে যায়, এদের বলে সরলরৈখিক (linear) সম্পর্ক। এদের সাধারণ আকার হলো $y = mx + b$। আমাদের সমীকরণে m ছিল 5, আর b ছিল 20। একবার দেখে রাখো, এই যে 5 পয়সা/মিনিট -এটাকেই বলে কল-রেট। রেট শব্দটার বাংলা হলো পরিবর্তনের হার। এটাকেই আমরা একটু পরে 'ঢাল' বলে জানব। দেখব এটা আসলে উন্নতির গতি প্রকাশ করে! এভাবে ভাবা যায়, এক মিনিট বেশি কথা বললে 5 পয়সা বেশি বিল আসে।

তোমাদের মধ্যে যারা আধুনিক মানুষ, তাঁরা স্মার্টফোন ব্যবহার করে এই $y = mx + b$ সমীকরণটাকে আরো একটু ভালো করে চিনে নিতে পারো। স্ক্যান করো পাশের কোডটি কিংবা ফোনের ব্রাউজার থেকে নিচের লিঙ্কে যাও- goo.gl/UpVwDD

৪.২ চৌধুরী সাহবের সন্তানেরা

আরেকটা উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। ধরো, চৌধুরী সাহেব মৃত্যুশয্যায় তার পাঁচ ছেলেকে ডাক দিলেন। বাবা আবুল, বাবুল, কাবুল, ডাবুল, ইবুল (সংক্ষেপে A, B, C, D, E) এদিকে আয়।

তো সন্তানদের ডাক দিয়ে বললেন, বাবারে আমার তো আর বেশিদিন নাই। আমি মারা যাওয়ার সময় আমার কাছে যা আছে তোদের কাছে দিয়ে গেলাম। পরে দেখা গেল যে তারা প্রত্যেকেই সমানভাগে 40 হাজার টাকা করে

পেয়েছে। এরপর ২ বছর, ৪ বছর আর ৬ বছর পর তাদের কার কাছে কত হাজার করে টাকা ছিল সেটা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে।

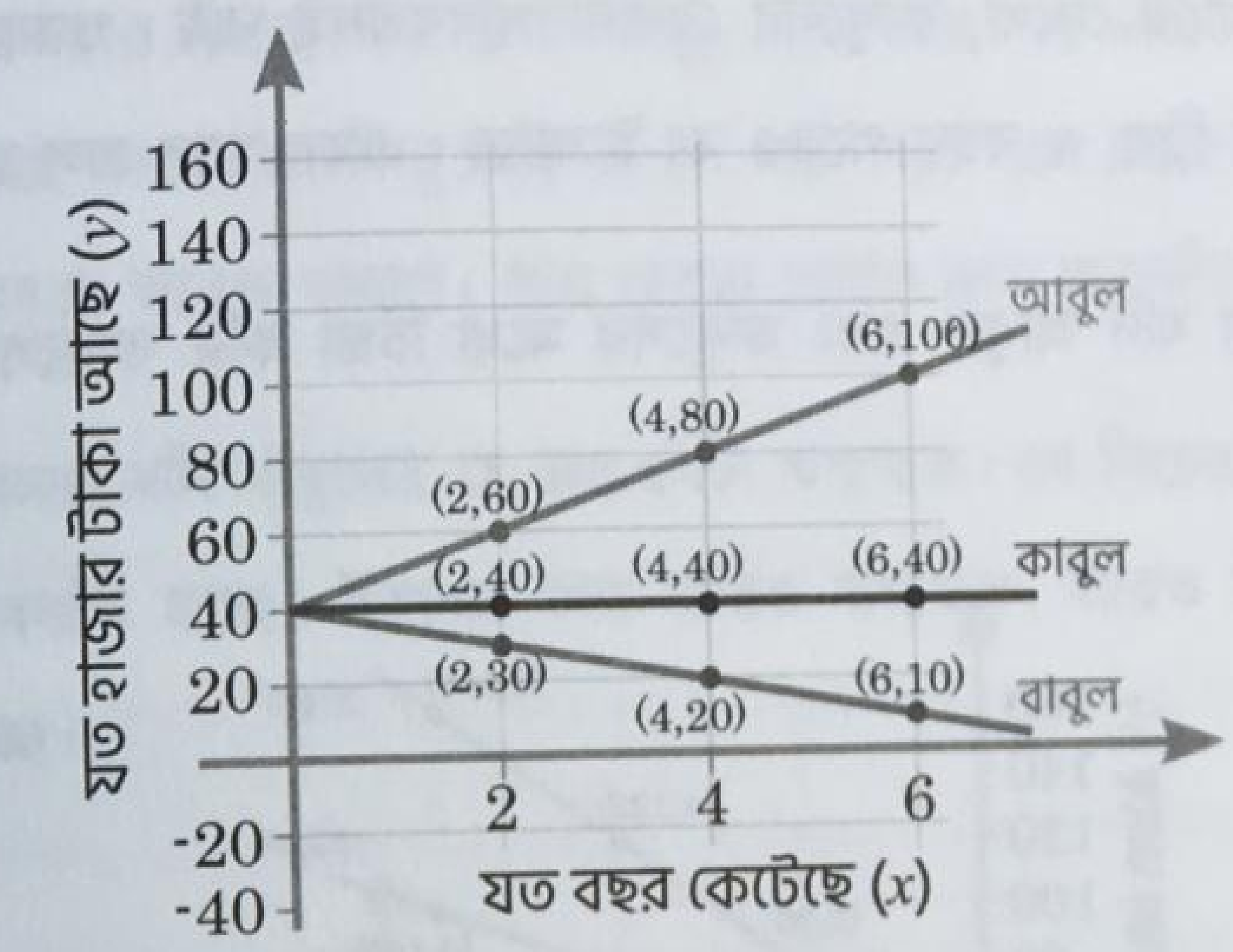
	শুরুতে	2 বছর পর	4 বছর পর	6 বছর পর
আবুল	40	60	80	100
বাবুল	40	30	20	10
কাবুল	40	40	40	40
ডাবুল	40	80	120	160
ইবুল	40	20	0	-20

চৌধুরী সাহেবের মৃত্যুর সময় আবুল, বাবুল, কাবুল, ডাবুল, ইবুল সবার কাছেই 40 হাজার করে টাকা আছে। দুই বছর পরে আবুলের কাছে দেখা গেল 60 হাজার টাকা। মানে সে হয়তো এটা নিয়ে ব্যবসা করে বাড়িয়েছে। চার বছর পর তার কাছে হলো 80 হাজার টাকা এবং ছয় বছর পর হলো 1 লাখ টাকা।

অন্যদিকে বাবুলের দিকে যদি তাকাই তাহলে দেখব প্রথমে তার হাতে ছিল 40 হাজার টাকা। কিন্তু দুই বছর পর তার টাকা হয় 30 হাজার টাকা। মানে সে কেমনে যেন 10 হাজার টাকা খুইয়ে বসেছে। চার বছর পর তার টাকার পরিমাণ কমেছে, ছয় বছর পর আরও কমেছে।

ওদিকে কাবুল সাহেব, তার দিকে যদি তাকাই তাহলে দেখবো প্রথমে ছিল 40 হাজার টাকা, দুই বছর পরেও 40 হাজার টাকা, চার বছর ও ছয় বছর পর 40 হাজার টাকাই! তার মানে আসলে তার কোনো পরিবর্তন হয় নাই। সে এই টাকা খাটায়ও নাই, নষ্টও করে নাই। এদিকে আসলে হাত দেয়নি, হয়তো অন্য কোনোভাবে চলেছে আরকি।

আমরা যদি এই তিনজনের গ্রাফ আঁকার চেষ্টা করি তাহলে দাঁড়াবে এমন।



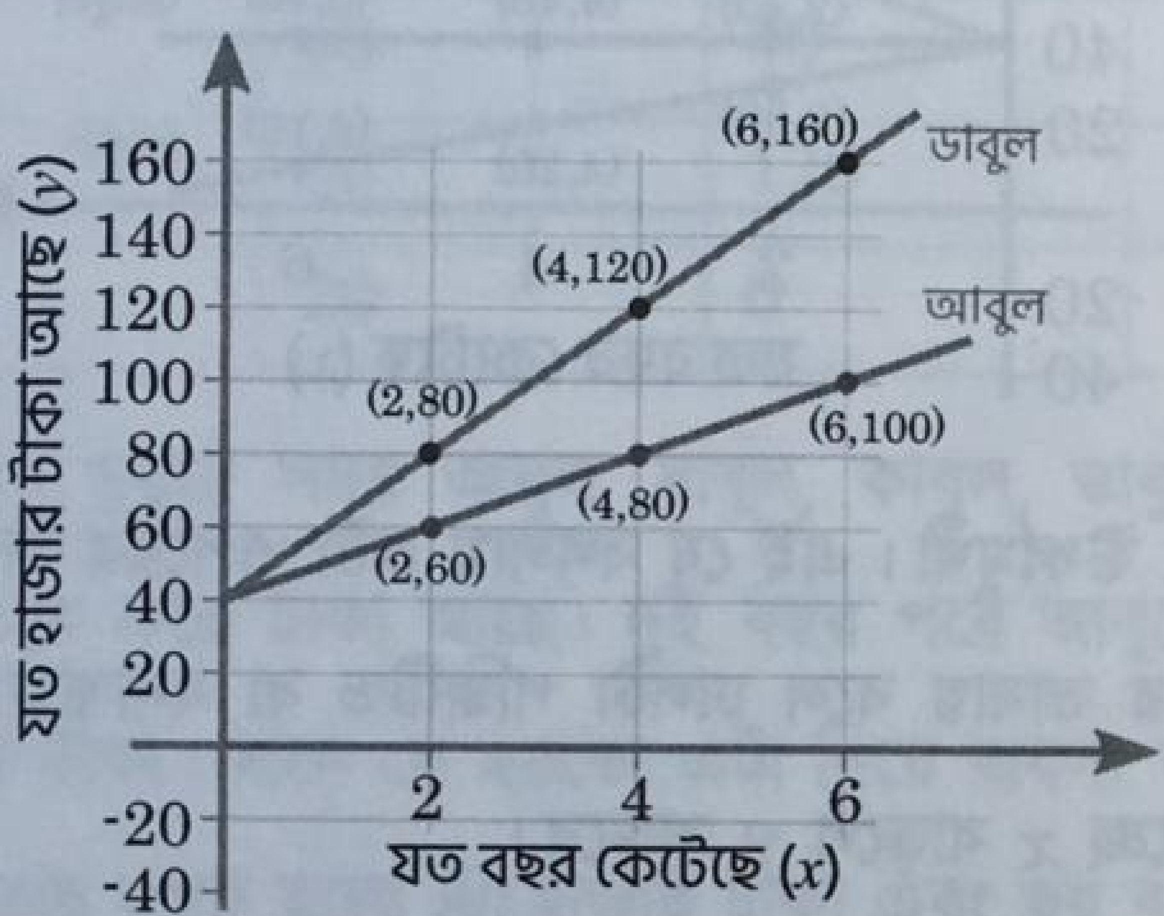
আবুলের গ্রাফটা উর্ধ্বমুখী। এই যে বললাম এটা ওপরের দিকে উঠে যাচ্ছে, সেটাকে গণিতের ভাষায় বলে ঢালটা পজিটিভ বা ধনাত্মক। ঢাল ধনাত্মক হওয়ার মানে হচ্ছে x বাড়লে y বাড়বে।

ঢাল ঋনাত্মক হওয়ার মানে হচ্ছে একটা বাড়লে আরেকটা কমবে। (অথবা একটা কমলে অপরটা বাড়বে)। যেরকম বাবুলের ক্ষেত্রে হয়েছে। বছর যত আগাচ্ছে, তার টাকার পরিমাণ কিন্তু কমছে। এজন্য তার রেখা নিচের দিকে নেমে আসছে। তার ঢাল ঋণাত্মক। এই যে ঢাল তার আরেকটা সমার্থক বাংলা হচ্ছে 'নতি' । আমরা বাংলায় একটা খুবই সুন্দর শব্দ জানি - 'উন্নতি' । এটা কিন্তু একেবারেই গাণিতিক শব্দ। উন্নতি শব্দটাকে আমরা যদি ভাঙি তাহলে দেখব: উদ+নতি (বাংলা ব্যাকরণ শিখিয়ে ফেললাম নাকি!)।

উদ মানে হচ্ছে ওপরের দিকে ওঠা আর নতি মানে হচ্ছে ঢাল। আমরা উন্নতি মানে হচ্ছে ওপরের দিকে ঢাল। আর বাবুলের যেটা হয়েছে, সেটা হলো অবনতি। নিচের দিকে ঢাল।

যাহোক আমরা দেখলাম আবুলের ঢালটা ধনাত্মক আর বাবুলের ঢালটা ঋনাত্মক। মাঝে দেখো, কাবুলের কোনো পরিবর্তনই নাই। শুরুতে যে ৪০ হাজার টাকা ছিল, ৬ বছর পরেও তা-ই আছে। এমন হলে ঢাল হয় শূন্য।

এখন আমরা যদি আবুল এবং ডাবুলের মধ্যে চিন্তা করি তাহলে কী দেখা যাবে?

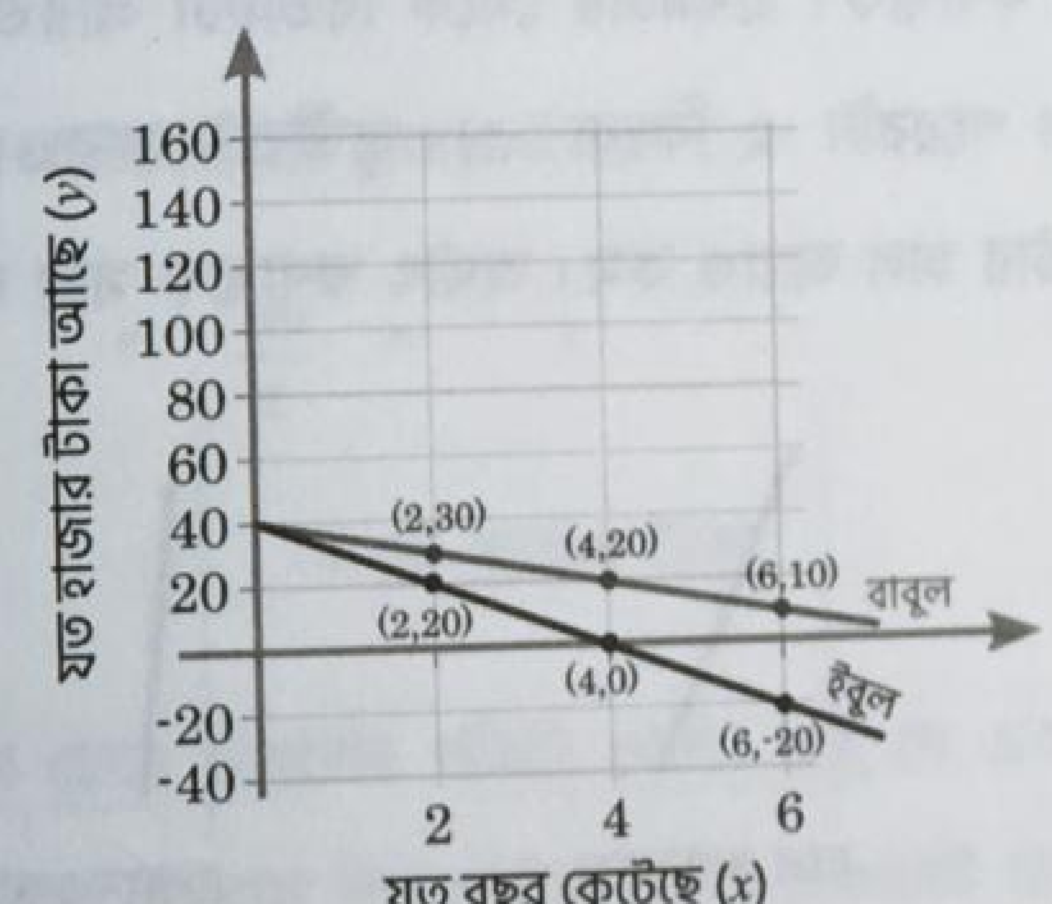


আবুল ধীরে ধীরে উন্নতি করেছে। ডাবুল কিন্তু আরও ভালো ছেলে। সে আরও বেশি উন্নতি করেছে। তার কাছে প্রথমে ছিল 40 হাজার, তারপর দুই বছরে 80 হাজার, এরপর 120 হাজার এবং শেষে 160 হাজার! তার গতি কিন্তু আবুলের চেয়ে বেশি। আবুলের লেখচিত্রটার চেয়ে ডাবুলের রেখা আরও খাড়াভাবে ওপরে উঠে গেছে। এমন হলে আমরা বলি, আবুল, ডাবুল দুজনের ঢালই ধনাত্মক, কিন্তু ডাবুলের ঢাল বেশি। তার মানে ঢাল জিনিসটা হলো **উন্নতির গতি**। যে যত দ্রুত উন্নতি করে তার ঢাল তত বেশি।

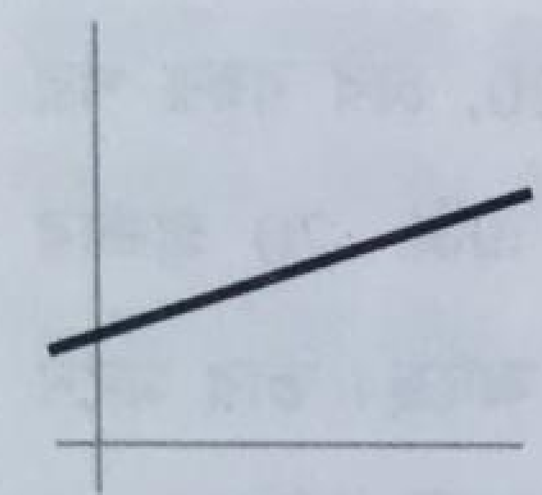
এবার আরও দুজনের কথা চিন্তা করি, বাবুল ও ইবুল। তারা কিন্তু নিচের দিকে নামছে। বাবুল খারাপ ছেলে! তার হাতে প্রথমে ছিল 40 হাজার টাকা যা দ্বিতীয় বছরে কমে দাড়ায় 30 হাজার টাকা এবং এরপর সেটা কমে 20 হাজার ও 10 হাজার হয়ে যায়। আপনি ইবুলের দিকে তাকান তার অবস্থা

আরও খারাপ। 40 হাজার থেকে দুই বছর পর দাঁড়ায় 20, চার বছর পর শূন্য (মানে তার কাছে আর নেই কিছু), ছয় বছর পর এটা -20 হাজার দাঁড়ায়। তার কাছে তো কিছু নেই-ই, সে ধার করে বসে আছে। তার মানে ইবুলের অবস্থা আরও খারাপ। তার অবস্থা আরও দ্রুত অবনতি ঘটছে।

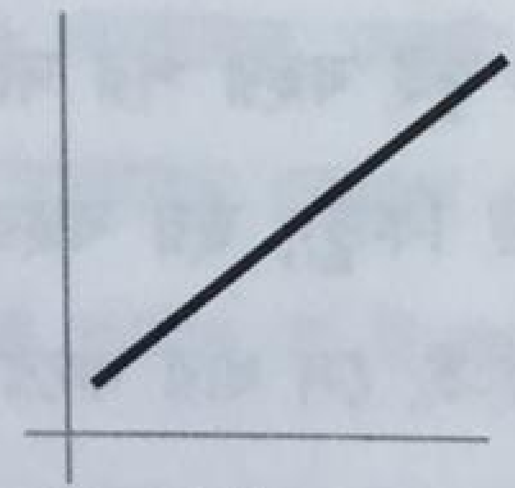
এখানে আমরা বলি বাবুলের যে ঢাল সেটা ঋণাত্মক। সে নিচের দিকে নেমে যাচ্ছে, অবনতি হচ্ছে। ইবুলের ঢাল আরও ঋণাত্মক, আরও নিচের দিকে নেমে যাচ্ছে।



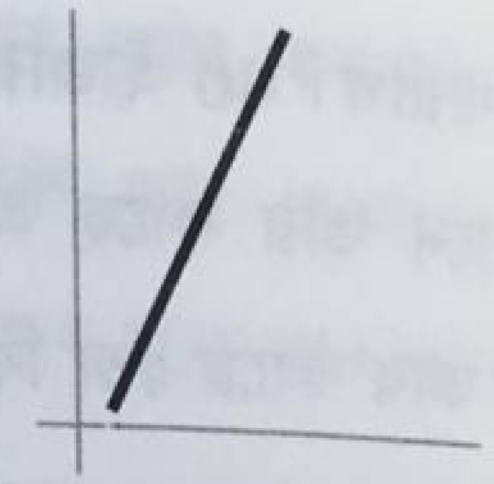
চলো এবার যা যা শিখলাম তার সার-সংক্ষেপ করি। একটা সরলরেখা ডানে গেলে যদি ওপরের দিকে ওঠে, তখন ঢাল ধনাত্মক। যে যত দ্রুত ওপরে ওঠে, তার ঢালের মান তত বেশি। নিচের ছবিগুলোতে দেখো, সবার ঢালই এখানে ধনাত্মক, তবে প্রথমটা থেকে দ্বিতীয়টা বেশি খাড়া, তাই দ্বিতীয়টার ঢাল বেশি। তৃতীয়টার ঢাল আরও বেশি।



ঢাল ধনাত্মক
[x বাড়লে y বাড়ে,
ডানে গেলে উপরে ওঠে]

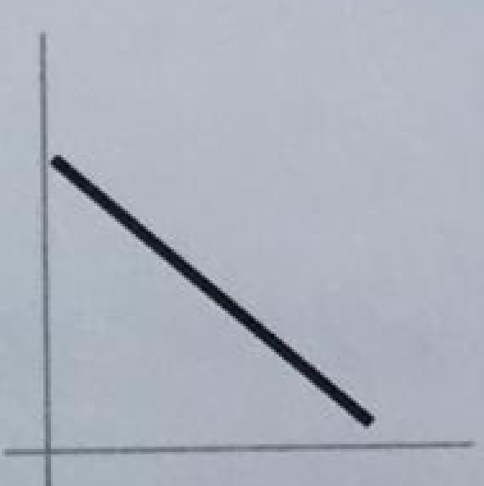


ঢাল ধনাত্মক,
এটা বেশি খাড়া,
ঢালের মান বেশি
[x বাড়লে y বেশি দ্রুত বাড়ে,
ডানে গেলে দ্রুত উপরে ওঠে]

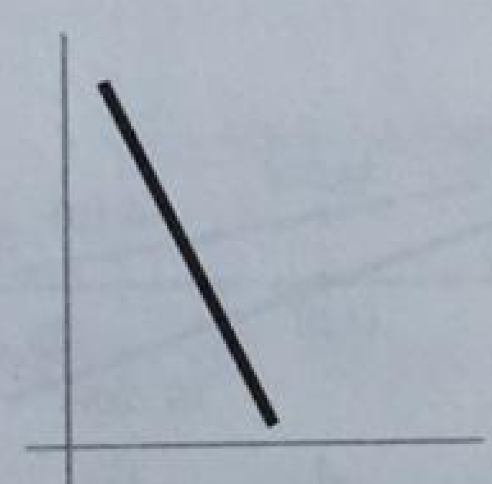


এখানেও ঢাল ধনাত্মক,
এটা আরও বেশি খাড়া,
ঢালের মান আরও বেশি
[x বাড়লে y আরও দ্রুত বাড়ে,
ডানে গেলে আরও দ্রুত উপরে ওঠে]

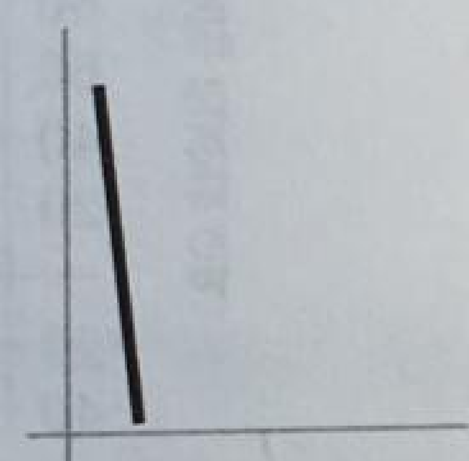
একইভাবে ঋণাত্মক ঢালের জন্যও ভাবা যায়। এখানে সবাই নিচে নামছে, তাই সবার ঢাল ঋণাত্মক। প্রথমটার থেকে দ্বিতীয়টা আরও বেশি ঋণাত্মক (প্রথমটা -১ হলে পরেরটা -২ কিংবা -৩)। তৃতীয়টা আরও খাড়া হয়ে নিচে নেমে যাচ্ছে। এটার ঢাল আরও কম। অর্থাৎ ঋণাত্মক মান আরও বেশি।



ঢাল ঋণাত্মক
[x বাড়লে y কমে,
ডানে গেলে নিচে নামে]



ঢাল ঋণাত্মক,
এটা বেশি খাড়া,
ঢাল আরও ঋণাত্মক
[x বাড়লে y বেশি দ্রুত কমে,
বামের সরলরেখার ঢাল -1
হলে এটা -2, -3 এমন]



এখানেও ঢাল ঋণাত্মক,
এটা আরও বেশি খাড়া,
ঢালের মান আরও ঋণাত্মক
[x বাড়লে y আরও দ্রুত কমে,
এটা হয়তো -6 বা -7, এমন]

৪.৩ ঢাল হিসেবের নিয়ম

আমরা তো বুঝলাম ঢাল মানে উন্নতির গতি। কিন্তু উন্নতির গতিটা মাপব কীভাবে? অবশ্যই সেটা মাপা যাবে। চলো আবুল ও ডাবুলের গ্রাফটার দিকে আবার তাকাই। এই যে আবুল সাহেব ও ডাবুল সাহেব আছেন, তাদের মধ্যে ডাবুল সাহেবের গতি বেশি। কত বেশি এইটা আমরা জানতে চাই। চলো দেখি, দুই বছরে কার টাকা কত বেড়েছে?

4 থেকে 6 বছরের মধ্যে যে পরিবর্তনটা সেটা দেখাই। আমাদের ঐকিক নিয়মের সহায়তা নিতে হবে।

আবুলের 2 বছরে বেড়েছে 20 হাজার টাকা

" 1 " " $\frac{20}{2}$ " "

= 10 হাজার টাকা

ডাবুলের ক্ষেত্রে কি হয়েছে?

ডাবুলের 2 বছরে বেড়েছে 40 হাজার টাকা

" 1 " " $\frac{40}{2}$ " "

= 20 হাজার টাকা

অবশ্যই আবুলের চেয়ে ডাবুলের গতিটা বেশি। এই যে এক বছরে কতটুকু বেড়েছে তার হিসাব করলাম না? সেটাই ঢাল। এভাবেই ঢাল হিসেব করে। আবুলের ঢাল= 10 হাজার টাকা/বছর।

তাহলে ঢাল জিনিসটা কী দাঁড়াল?

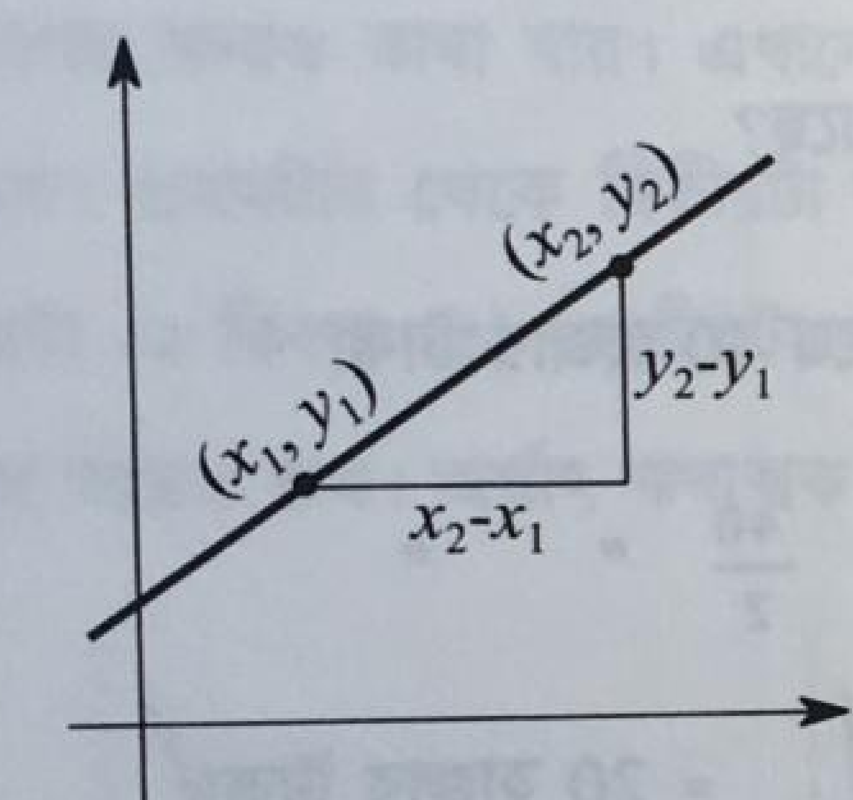
x-এর মান 1 বাড়লে y-এর মান কত বাড়ে সেটা হচ্ছে ঢাল। ঢালের আরও সংজ্ঞা আছে, কিন্তু এটা হলো আমার কাছে ঢালের সবচেয়ে সহজ সংজ্ঞা, যার মাধ্যমে আমি খুব সহজেই বুঝি। চলো আরেকটু গাণিতিক উপায়ে বলি।

ধরো, আমরা দেখলাম- x-এর মান Δx বাড়লে y বাড়ে Δy, ঐকিক নিয়মেই বলা যায়, x এর মান 1 বাড়লে y বাড়ে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$।

এটাই ঢালের গাণিতিক সংজ্ঞা! ঢাল $=\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ y এর পরিবর্তন/ x-এর পরিবর্তন।

এটা জানলে এবার বিন্দু থেকে ঢাল বের করা যায়।

একটা রেখার উপর যদি দুটো বিন্দু হয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2), তাহলে, ঐ রেখাটার ঢাল $=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



আমার সেই চমক ফোনের কথা ভাবতে পারো এখন। ওখানে x ছিল কত মিনিট কথা বলছি, আর y ছিল মোট বিল। কলরেট 5 পয়সা/মিনিট মানে হলো- 1 মিনিট আরও বেশি কথা বললে বিল বাড়বে 5 পয়সা। x এর মান 1 বাড়লে y বাড়ে 5। তাই ঢাল= 5।

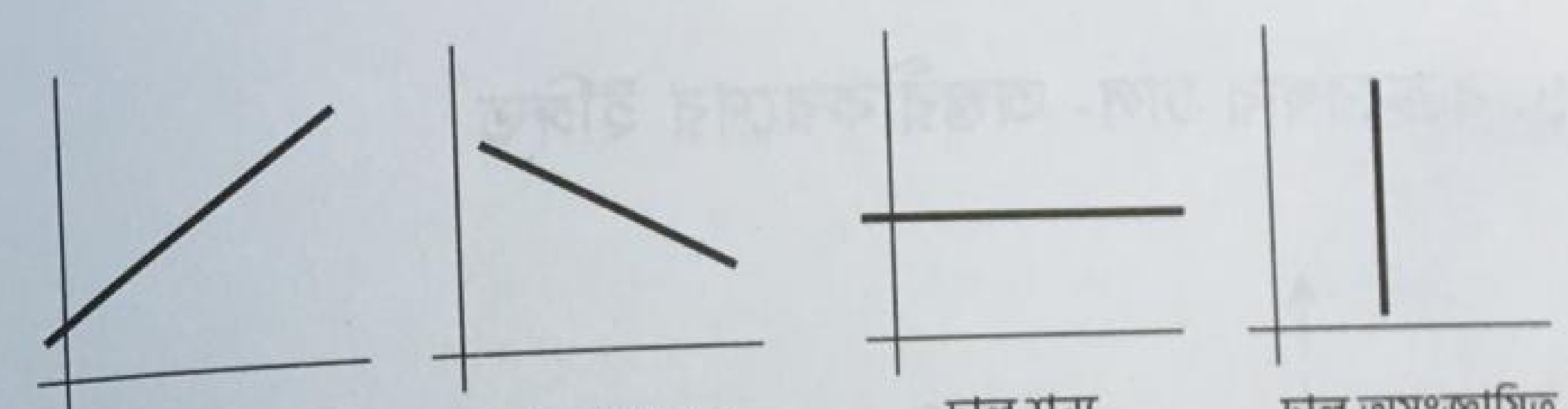
৪.৪ চার রকমের ঢাল

ঢাল আছে চার রকমের। তার মধ্যে তিন রকমের ঢাল তোমরা দেখে ফেলেছ। পজিটিভ, নেগেটিভ আর শূন্য।

আরেকটাও আসলে আছে। সেটাকে বলে অসংজ্ঞায়িত ঢাল। এটা পাবে যখন রেখাটা উল্লম্ব বা y অক্ষের সমান্তরাল হয়। এই সময় x-এর মান বাড়লে y যে কোথায় যায়, তা আর বোঝা যায় না। কেউ চাইলে ভাবতে পারে, এটা

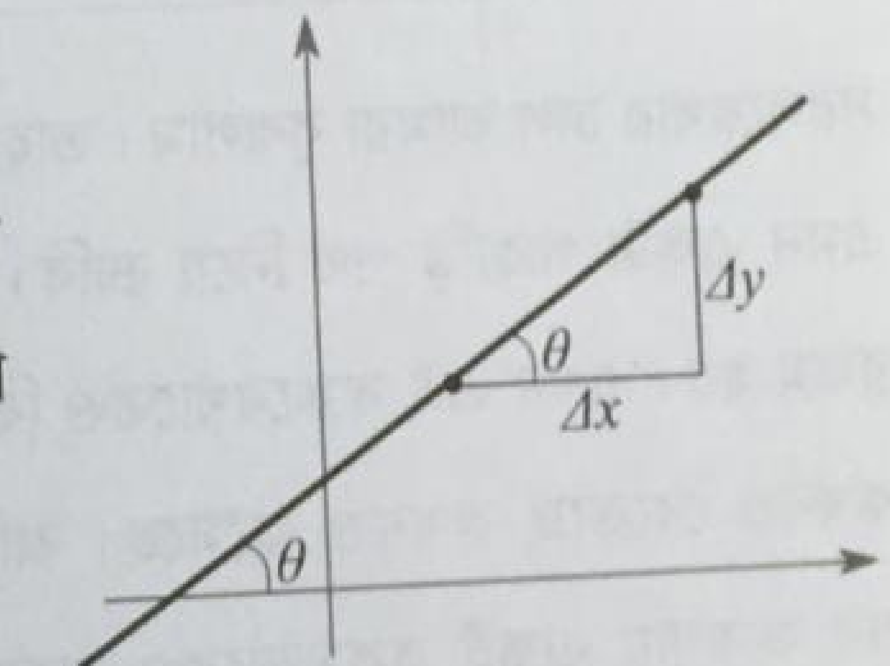
বাড়তে বাড়তে ধনাত্মক অসীমের দিকে গেছে। আবার কেউ ভাবতে পারে কমতে কমতে ঋণাত্মক অসীম-পানে গেছে।

চার রকমের ঢাল



৪.৫ ঢালের আরেক সংজ্ঞা

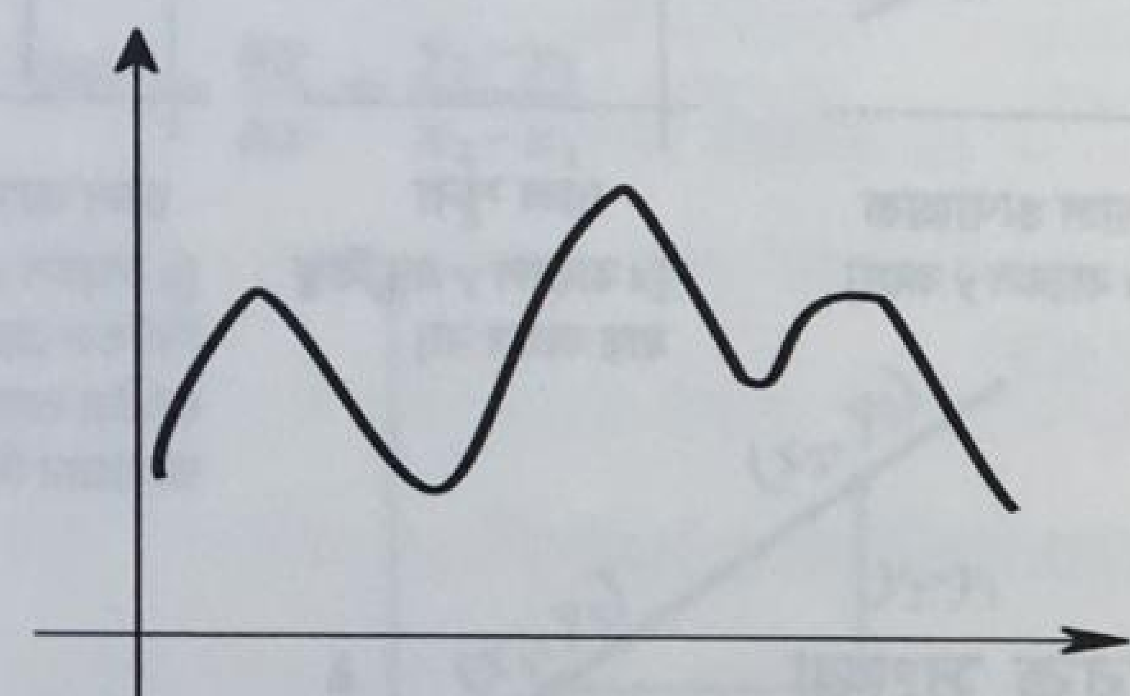
দেখো, ঢালকে $\tan\theta$ দিয়েও প্রকাশ করা যায়, কারণ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ কে চিন্তা করা যায় লম্ব আর ভূমির অনুপাত।



এখান থেকে অনেকে এভাবেও ঢালকে
অনেকে এভাবে সংজ্ঞা দিয়ে থাকে, 'একটি সরলরেখা এক্স অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ট্যানজেন্টের মানকে ঢাল বলে।' কলেজে থাকতে আমাদেরকে এভাবে শেখানো হয়েছিল। এটা ভুল নয়, তবে এখন বুঝি, এটা হলো ঢালের সেই সংজ্ঞা- যেটা দিয়ে ঢাল সম্পর্কে কিছুই বোঝা যায় না! ঢাল হলো উন্নতির গতি, পরিবর্তনের হার- এই ব্যাপারটা না বুঝলে ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস ব্যাপারটাই ঠিকমতো বোঝা যাবে না।

যাহোক, অন্য আরেকটা ব্যাপার বলি। উল্লম্ব রেখার ঢাল যে অসংজ্ঞায়িত ঢাল, সেটা $\tan\theta$ থেকেও বোঝা যায়। সেক্ষেত্রে θ এর মান হয় নব্বই ডিগ্রি। আর তার ট্যানজেন্টের মান হলো অসংজ্ঞায়িত।

৪.৬ বক্ররেখার ঢাল- অন্তরীকরণের ইঙ্গিত



সরলরেখার ঢাল আমরা বুঝলাম। তাহলে বক্ররেখার ঢাল কেমন হবে? চলো, এমন একটা পাহাড়ি পথ নিয়ে ভাবি। সরলরেখায় সব বিন্দুতেই ঢাল একই রকম হয়। এখন এই বক্ররেখাতেও কি তা-ই হবে? মোটেই না। দেখো এটা কখনও বেড়েছে কখনও কমেছে। আবার, যেখানে যেখানে বেড়েছে, সেই সব জায়গায় একই রকমভাবেও বাড়েনি। তাই এর ঢাল একেক জায়গায় একেক রকম। এই বক্ররেখার নানান জায়গায় ঢাল কোথায় কেমন সেটা যদি গাণিতিকভাবে বের করতে পারি, তাহলেই আমরা বুঝে যাব ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস বা অন্তরীকরণ! পরের অধ্যায়ে ঠিক সেটাই করব আমরা।

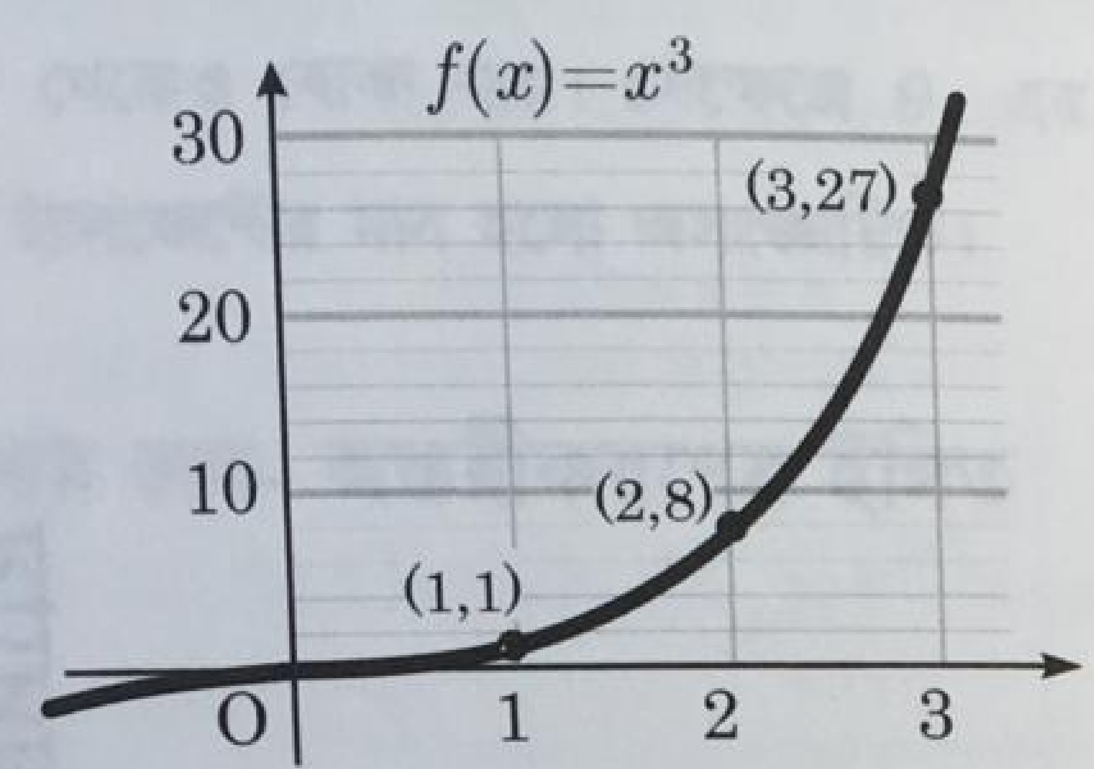
অধ্যায় ৫

অন্তরীকরণের মূল নিয়ম: কাছে আসার গল্প

৫.১ মূল নিয়মের মূল কথা

এ অধ্যায়টি আমাদের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ অধ্যায়গুলোর একটি। এখানেই বোঝা যাবে ডিফারেন্সিয়েশন বা অন্তরীকরণ দিয়ে আমরা আসলে কী করি। আমি আগের অধ্যায়ে বলেছিলাম বক্ররেখার ঢাল বের করতে ডিফারেন্সিয়েশন লাগে। তার জন্য এই গ্রাফটার দিকে চোখ দেয়া যাক। এটি $y = x^3$-এর গ্রাফ। x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর বিভিন্ন মান হিসাব করে গ্রাফটাকে আঁকা হয়েছে।

যেখানে x-এর মান 1, সেখানে y-এর মান 1, যেখানে x-এর মান 2, সেখানে y-এর মান $2^3 = 8$, যেখানে x-এর মান 3 সেখানে y-এর মান $3^3=27$, এরকম করে বিন্দু বসিয়ে বসিয়ে গ্রাফটা আঁকা। আমরা ফাংশন দিয়ে লিখলে বলতে পারতাম এটা $f(x) = x^3$-এর গ্রাফ। এই ফাংশনের কাজ হলো যাকে পাবে তাকে ধরে ঘন করবে।



এখন বিন্দুগুলোকে অন্য একটা স্টাইলে লেখা শেখাই, যেটা খুব কাজে দেবে। আমরা দেখি $f(2) = 2^3 = 8$। 8 তো ওই বিন্দুর কোটি, তার মানে $f(2)$ দিয়েও একটা **কোটি** বোঝায়। ভালো করে বললে, $f(2)$ দিয়ে বোঝায় সেই বিন্দুর **কোটি,** যেখানে ভুজ বা x-এর মান 2। এই ব্যাপারটা আসলে খুব জরুরি। তাই আমি কথাটা আবার জোর দিয়ে একটা কালো বাক্সের মধ্যে লিখি-

> **মনে রেখো:** $f(2)$ বলতে বোঝায় x-এর মান যেখানে 2, সেখানে কোটি কত। একইভাবে, $f(a)$ মানে সেই বিন্দুর কোটি, যেখানে ভুজ a।

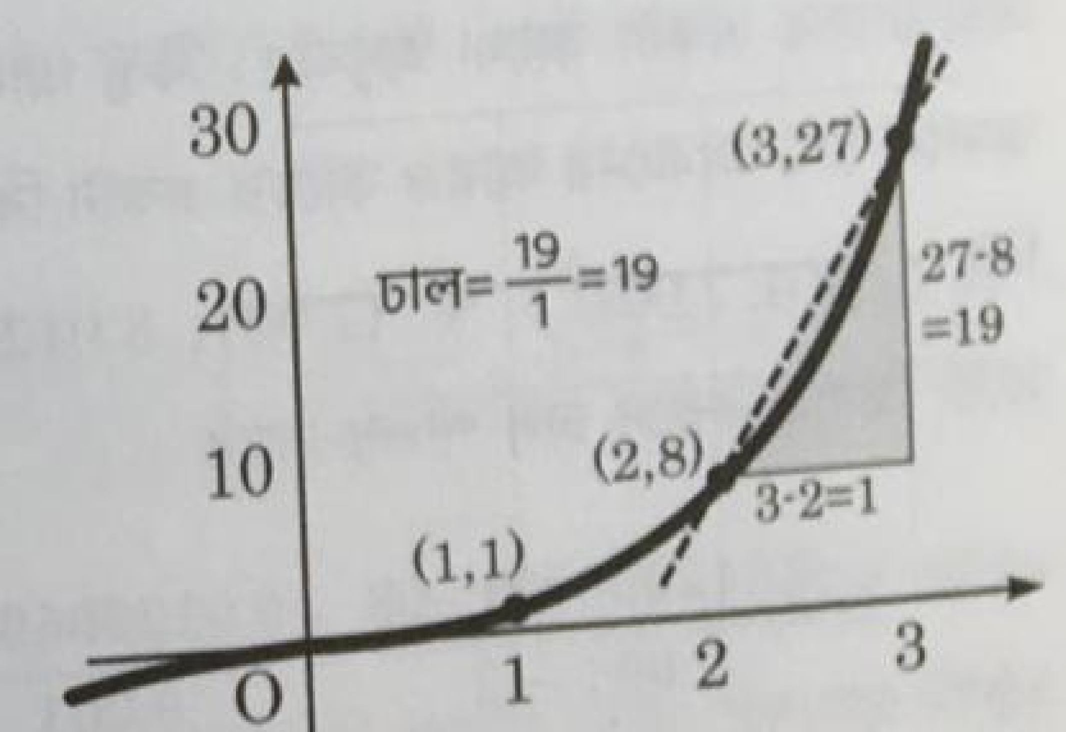
ভেবে দেখো, এই (2,8) বিন্দুটিকে চাইলে এভাবেও লেখা যায় $(2, f(2))$। তাহলে আমরা এখন থেকে যেকোনো বিন্দুর কোটিকে চালাকি করে বলতে পারব। x-এর মান যেখানে 55, সেখানে বিন্দুটাকে আমার লিখতে পারব $(55, f(55))$

এবার আমাদের মূল চিন্তা শুরু। প্রশ্ন হচ্ছে, 'এই গ্রাফের যে বিন্দুতে ভুজ 2 সেখানে **ঢাল** কত?' এটাকে এভাবেও লেখা হয়: $x = 2$ বিন্দুতে ঢাল কত।

যেখানে $x = 2$, সেখানে y-এর মান হবে 2^3 অর্থাৎ আমরা আসলে (2,8) বিন্দুতে ঢাল কত, সেটা জানতে চাই। ঢাল ব্যাপারটা কী মনে আছে তো? এটা হলো উন্নতির গতি। x-এর মান এক একক বাড়ালে y যতখানি বাড়ে, সেটাই ঢাল। ঢালের মান বের করতে সাধারণত দুটি বিন্দু লাগে। সরলরেখার ওপর দুটি বিন্দু থাকলে ঢাল বের করা যায় কোটি দুটির বিয়োগফল ভাগ ভুজ দুটির বিয়োগফল দিয়ে। সরলরেখার ক্ষেত্রে এভাবে বের করা যায়, কারণ সরলরেখায় সব জায়গাতেই ঢাল একই থাকে। একইভাবে সে উন্নতি করতে থাকে। কিন্তু বক্ররেখার উন্নতি সব জায়গায় একরকম না। তাহলে (2,8) বিন্দুতে আমরা কীভাবে ঢাল বের করতে পারি? আমরা লক্ষ করি এই গ্রাফটা ধীরে ধীরে আরও খাড়া হয়ে ওপরের দিকে উঠে যাচ্ছে, এটার ঢাল বেড়েই চলেছে। (2,8) বিন্দুতে যেই ঢাল হবে (3,27) বিন্দুতে নিশ্চয়ই ঢাল সেরকম হবে না, বেশি হবে।

ঝামেলাটা এবার বোঝো। আমরা চাই, (2,8) বিন্দুর ঢাল, কিন্তু ঢাল বের করতে লাগে দুটো বিন্দু। একটা না হয় (2,8), আরেকটা কোনটা হবে? চলো, আপাতত (2,8) আর (3,27) নিয়ে ভাবি।

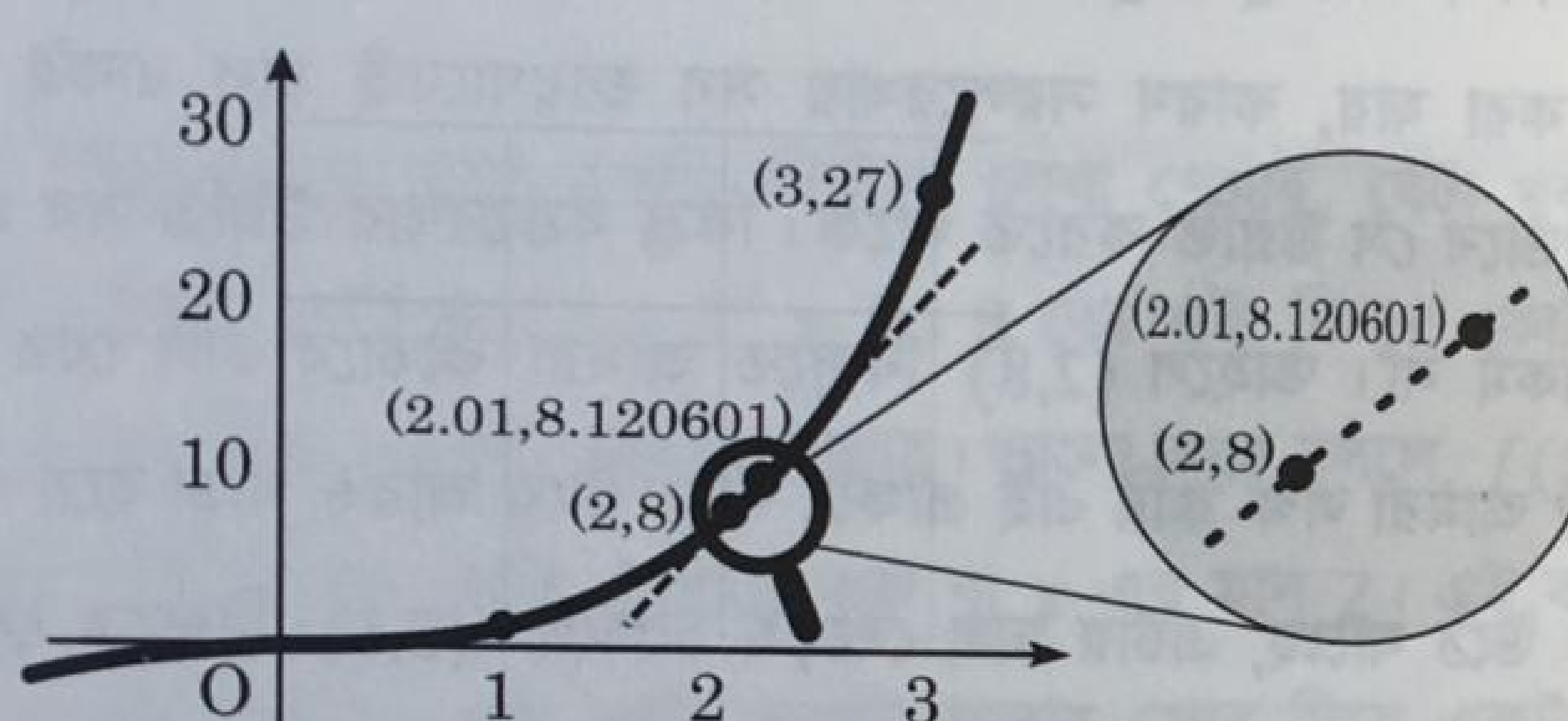
এই দুটো বিন্দুকে যোগ করে দিলে যেই রেখাটা পাওয়া যাবে তার ঢাল হবে $\frac{(27-8)}{(3-2)} = 19$ ।



কিন্তু আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি না যে, এটাই $(2, 8)$ বিন্দুতে ঢাল। আমরা যদি (2,8) এর সাথে আরেকটা বিন্দু নিতাম তাহলেও কি ঢাল একই আসত? খেয়াল করো, আমরা দেখতে

পাচ্ছি (2,8) থেকে যত দূরে যায়, ঢাল তত আলাদা হয়ে যাচ্ছে। (3,27) বিন্দুতে রেখাটা অনেক বেশি খাড়া অয়ে গেছে। তাই বুদ্ধিমান চিন্তা হবে (2, 8) –এর সাথে এর খুব, খুব কাছের একটা বিন্দু নিয়ে ভাবা। তাহলে ঢাল বেশি আলাদা হয়ে যাওয়ার সুযোগ পাবে না।

ধরা যাক বিন্দুটা $(2.01, 2.01^3)$ বা (2.01, 8.120601)।



তাহলে (2, 8) এবং (2.01, 8.120601) বিন্দু দুটির সংযোগ রেখার ঢাল পাওয়া যাবে

$$= \frac{8.120601 - 8}{2.01 - 1} = \frac{0.120601}{0.01} = 12.0601$$

এটা ঢালের একটা ভালো অনুমান। কিন্তু আমরা যদি আরও নিখুঁত করে জানতে চাই আমাদের আরও কাছের একটা বিন্দু নিয়ে ভাবতে হবে, এবার নিই $(2.001, 2.001^3)$ বা (2.001, 8.012006001)। এবার আগের মতো হিসাব করলে ঢাল পাওয়া যাবে

$$= \frac{8.012006001 - 8}{2.001 - 2} = \frac{0.012006001}{0.001} = 12.006001$$

মোটামুটি আমরা একটা 'সন্দেহ' করতে পারি যে x=2 বিন্দুতে অর্থাৎ (2, 8) বিন্দুতে ঢাল হতে পারে 12। থাক আমরা এবারে আরও গাণিতিকভাবে ভাবতে চাই।

একটু আগে যে ফাংশনের স্টাইলে বিন্দু লেখা শেখালাম, সেই স্টাইলে যদি আমরা (2, 8) আর (2.001, 8.012006001) বিন্দু দুটির সংযোগরেখার ঢাল বের করতাম, তখন আমরা কীভাবে লিখতাম? আমরা লিখতাম- $(2, f(2))$ এবং $(2.001, f(2.001))$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল = $\frac{f(2.001)-f(2)}{2.001-2}$।

খেয়াল করে দেখো, যখন আমরা এভাবে লিখছি $\frac{f(2.001)-f(2)}{2.001-2}$, সেখানে ওপরে আছে কোটিদ্বয়ের অন্তর নিচে ভুজদ্বয়ের অন্তর।

এখন একটা ব্যাপার বলি। 2.001 বিন্দুটা আমি কেন নিয়েছিলাম? যেন 2-এর থেকে অল্প একটু বেশি হয়, 2-এর খুব কাছাকাছি হয়। আমরা জানি যে এর চেয়েও কাছাকাছি নেওয়া যায়। তখন আরও নিখুঁতভাবে ঢালের মান পাওয়া যাবে। এই যে 2-এর থেকে যতটুকু বেশি আমরা নিচ্ছি, এই 0.001-এটাকে আমরা h নাম দিলাম। তাহলে একটু আগে লেখা ঢালের মানকে এভাবে লেখা যায়

$$\frac{f(2.001) - f(2)}{2.001 - 2} = \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

এটা খুবই দারুণ একটা আকার। h-এর মান যদি 0.001 থেকে আরও আরও ছোট হতো, আরও নিখুঁতভাবে ঢাল পাওয়া যেত। সবচেয়ে নিখুঁত হতো যদি h-এর মান শূন্য হয়ে যেত, তখন ঠিকঠিক (2,8) বিন্দুতেই

ঢাল পেতাম। কিন্তু সেটা আমরা ধরতে পারছি না। কারণ $h = 0$ হলে ঢাল দাঁড়াবে

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{f(2+0)-f(2)}{0} = \frac{f(2)-f(2)}{0} = \frac{0}{0},$$ যেটা অনির্ণেয় আকার।

কিন্তু দাঁড়াও! আমরা তো জানি এ অবস্থায় নিখুঁতভাবে মান জানতে কী করতে হয়। এই অবস্থায় নিতে হয় 'লিমিট'। আমি দ্বিতীয় অধ্যায়ে ঠিক এ জন্যই লিমিট শিখিয়ে নিয়েছি! h ঠিক শূন্য না হতে পারে, শূন্যের সন্নিকটবর্তী হতে তো দোষ নেই। তার মানে যখন $h \to 0$, তখন যদি আমরা লিমিট দিয়ে ঢালের মান বের করি সেটাই হবে $(2, 8)$ বিন্দুতে নিখুঁতভাবে ঢালের মান। তাহলে $(2, 8)$ বিন্দুতে বা $(2, f(2))$ বিন্দুতে নিখুঁত ঢালের মান $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ।

আসলে এই লাইনটাকেই বলে ডিফারেন্সিয়েশনের মূল নিয়ম। এটা নিয়ে আরও কথা হবে, তার আগে যা করছিলাম, সেটা শেষ করি।

এটা একটা লিমিটের অঙ্ক, আর আমরা তো এখন জানিই এমন অঙ্ক কী করে করতে হয়!

$$\therefore (2, f(2)) \text{ বিন্দুতে ঢাল } = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2^3+3.2^2.h+3.2.h^2+h^3-2^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3.2^2.h+3.2.h^2+h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3.2^2+3.2.h+h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3.2^2 + 3.2.h + h^2)$$

[h কমন নিলাম, তারপর h কাটলাম। h কাটতে পারি, কারণ h শূন্য নয়, শূন্যের সন্নিকটবর্তী (tends to zero)]।

এখন যেই আকারে আমরা এসে পৌঁছেছি, সেখান থেকে স্পষ্ট বোঝা যায়, h-এর মান শূন্যে গেলে ঢালের মান কোথায় যাবে। h-এর মান শূন্যে পৌঁছালে ডানের h-ওয়ালা অংশগুলো শূন্য হয়ে যাবে, থাকবে শুধু $3.2^2 = 12$।

অর্থাৎ $(2, f(2))$ বিন্দুতে ঢাল হলো বা 12, যেটা আমরা সন্দেহ করেছিলাম।

এবার চিন্তাশীল মানুষেরা, ভেবে দেখো তো, এখানে যদি আমরা $(5, f(5))$ বিন্দুতে ঢাল চাইতাম, ঢাল কত হতো? উপরের অঙ্কে যত জায়গায় 2 ছিল সব জায়গায় তখন 5 হতো। শেষে ঢালের মান পেতাম 3.5^2।

একইভাবে $(1, f(1))$ বিন্দুতে ঢাল হতো 3.1^2, $(3, f(3))$ বিন্দুতে ঢাল হতো 3.3^2, $(p, f(p))$ বিন্দুতে ঢাল হতো $3p^2$, $(x, f(x))$ বিন্দুতে ঢাল হতো $3x^2$।

অর্থাৎ $f(x)=x^3$-এর যেকোনো বিন্দুতে ঢাল বের করার ফর্মুলা হলো $3x^2$। এই ব্যাপারটাকেই বলা হয় যে x^3-কে ডিফারেন্সিয়েট করলে পাওয়া যায় $3x^2$।

আবার $f(x)$-কে ডিফারেন্সিয়েট করলে কী হবে, সেটাকে f-এর ওপরে একটা প্রাইম চিহ্ন দিয়ে $f'(x)$ আকারেও লেখা হয়।

একটু আগে যেটা লিখেছিলাম, সেটার সাধারণ আকারটাও এখন লেখা যেতে পারে। $f(x)$-এর কোনো একটা বিন্দু $(x, f(x))$-এ ঢাল=

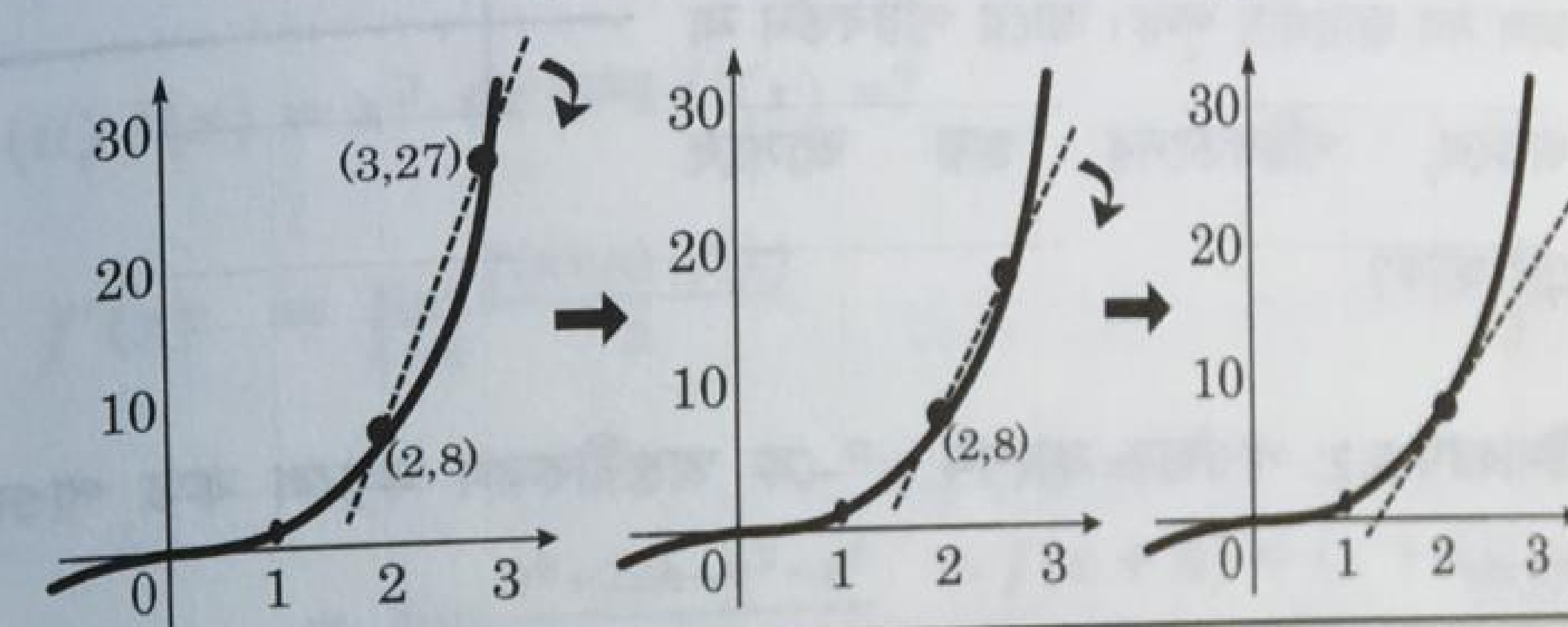
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

এটাই ডিফারেন্সিয়েশনের মূল নিয়মের বর্ণনা। আসল ব্যাপার কিন্তু সেই ঢাল। $f(x+h)-f(x)$ হলো কোটির অন্তর, h হলো ভুজের অন্তর, ডানের ভগ্নাংশটা একটা ঢাল। আর $\lim\limits_{h\to 0}$ নিলে পাওয়া যাবে নিখুঁত ঢাল।

যদি গ্রাফ থেকে ভাবো, তাহলে দেখবে, আমরা প্রথমে বের করেছি কোনো বক্ররেখার উপরে দুটো বিন্দুগামী ছেদকের ঢাল। এরপর আস্তে আস্তে বিন্দু দুটো যখন খুব কাছাকাছি এসে গেছে, যখন তাদের ব্যবধান হয়েছে শূন্যের সন্নিকটবর্তী তখন সেই ছেদকটা আসলে হয়ে গেছে স্পর্শক। নিচের ছবিতে দেখো ছেদক থেকে স্পর্শক হওয়ার ব্যাপারটা। এটাকে আমি বলি 'কাছে আসার গল্প'।

অন্তরীকরণ করলে আমরা পাই কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল।

ছেদক থেকে স্পর্শক - কাছে আসার গল্প



মনে রেখো: বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে ঢাল বলতে বোঝায় ওই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকরেখার ঢাল।

এই স্পর্শকের ঢালের আরেকটা নাম আছে— 'অন্তরক সহগ' (Differential Coefficient)। এটারই আরেকটা নাম হলো অন্তরজ বা ডেরিভেটিভ (Derivative)।

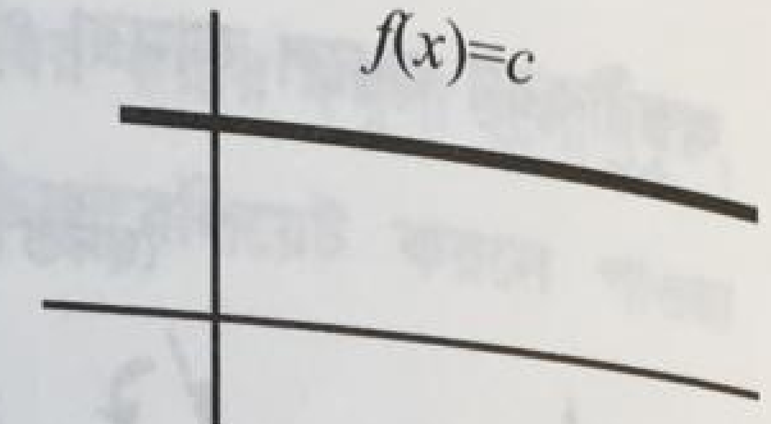
৫.২ অন্তরীকরণের মূল নিয়মের উদাহরণ:

উদাহরণ ৫.১: মূল নিয়মে দেখাও যে, $f(x) = c$ হলে $f'(x) = 0$.

মূল নিয়ম থেকে আমরা জানি,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \; [\because f(x) = c, \therefore f(x+h) = c] \\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

এর মানে হলো, ফাংশনের মান যদি ধ্রুব হয়, যদি কোনো পরিবর্তন না হয়, তাহলে ঢাল সব জায়গায় শূন্য। আরে পরিবর্তন না থাকলে, পরিবর্তনের হার আসবে কোত্থেকে?



উদাহরণ 5.2: পাওয়ার ফাংশন: x^n-কে অন্তরীকরণ করলে কত পাওয়া যাবে?

এটার প্রমাণ বইয়ে অহরহ পাওয়া যায়। তবে আমি চাই, তুমি ধাপে ধাপে অনুমান করো মানটা কেমন আসা উচিত। চলো n-এর মান 1, 2, 3 হলে মূল নিয়ম থেকে কী পাওয়া যায়, দেখি।

(i) প্রথম ক্ষেত্র (যখন n=1): $f(x) = x^1 = x$

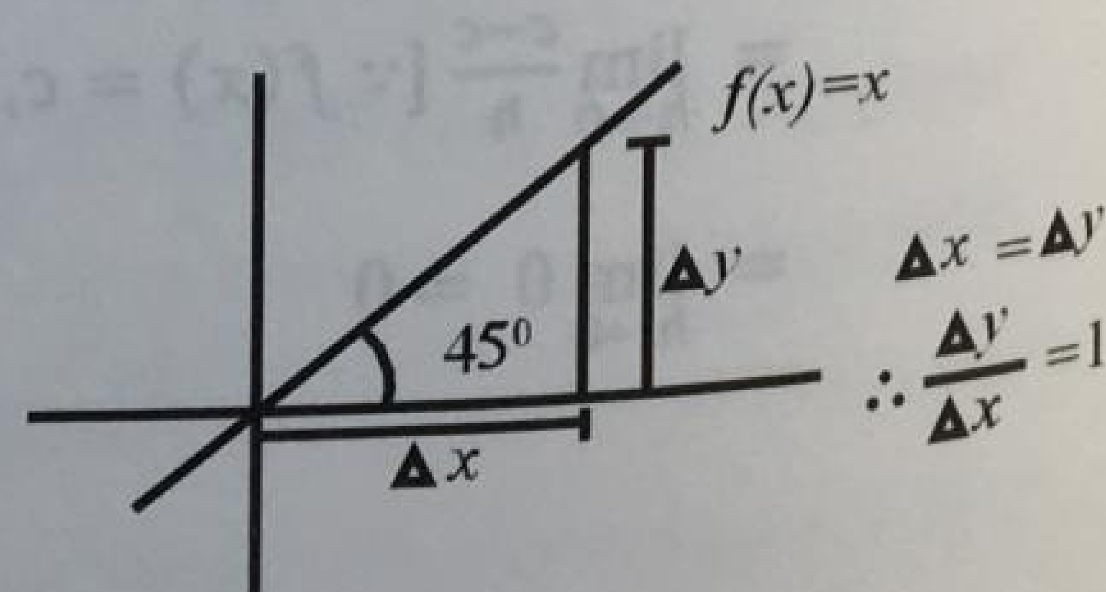
মূল নিয়ম থেকে আমরা জানি,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \quad [\because f(x) = x, \therefore f(x+h) = x+h]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

অর্থাৎ, ঢাল 1। ছবিতে দেখো $f(x) = x$ একটা মূলবিন্দুগামী সরলরেখা। এর



ঢাল সবজায়গাতেই সমান। x-ও যত, y-ও তত। x, 1 বাড়লে y-ও 1 বাড়বে। অতএব, ঢাল = 1.

(ii) $f(x) = x^2$-এর জন্য $f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ \therefore f(x+h) = (x+h)^2 = \\ x^2+2xh+h^2 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

(iii) $f(x) = x^3$-এর জন্য কী হবে তা আমাদের উদাহরণে বের করেছি।

$$f'(x) = 3x^2$$

এখানে লক্ষ করো,

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

দ্বিতীয় পদটা গুরুত্বপূর্ণ কারণ ওপরে লিমিটের অঙ্কটার দিকে তাকাও, প্রথম পদটা কেটে যাচ্ছে। তারপর সবাইকে h দিয়ে ভাগ করা হচ্ছে। h শূন্যে লিমিট নিলে প্রথমটায় পড়ে থাকে $2x$, পরের পদে $3x^2$, তারপর $4x^3$. অনুমান করতে পারছ কি, এরপর কী থাকবে? $5x^4$.

$f(x) = x^2$ হলে $f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3$ হলে $f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^4$ হলে $f'(x) = 4x^3$

$f(x) = x^5$ হলে $f'(x) = 5x^4$

ফলে চিন্তাশীল মন সহজেই অনুমান করে নিতে পারে, x^6-এর জন্য আসবে $6x^5$এবং x^n-এর জন্য হবে nx^{n-1} ।

$\therefore f(x) = x^n$ হলে $f'(x) = nx^{n-1}$।

পূর্ণসংখ্যার জন্য সাধারণ প্রমাণটা এভাবে করা যায়।

$$f(x) = x^n$$

মূল নিয়মে, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\cdot h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot h^2 + \ldots + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}\cdot h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot h^2 + \ldots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot h + \cdots + h^{n-1}\right)$$

[লবে h কমন নিয়ে হরের সাথে কাটাকাটি]

$$= nx^{n-1}$$

কিন্তু যদি পাওয়ারটা পূর্ণসংখ্যা না হয়, তখন আর ওপরের প্রমাণটা খাটে না। তখন নিচের মতো করে প্রমাণ করা যায় দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ রূপ ব্যবহার করে।

ধরি, $f(x) = x^n$

মূল নিয়মে, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left\{x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n\left(1 + n\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \cdots\ \right) - x^n}{h}$$

[h খুব ক্ষুদ্র হলে $h < x$ভাবা যায়। তখন, $\frac{h}{x} < 1$। এটা না মানলে দ্বিপদী ব্যবহার করা যেত না।]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \ldots + h \text{ এর উচ্চঘাত ওয়ালা পদ}) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2} + \ldots + h \text{ এর উচ্চঘাতওয়ালা পদ}\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2} + \cdots + h \text{ এর উচ্চঘাতবিশিষ্ট পদ}\right\}$$

$$= nx^{n-1}$$

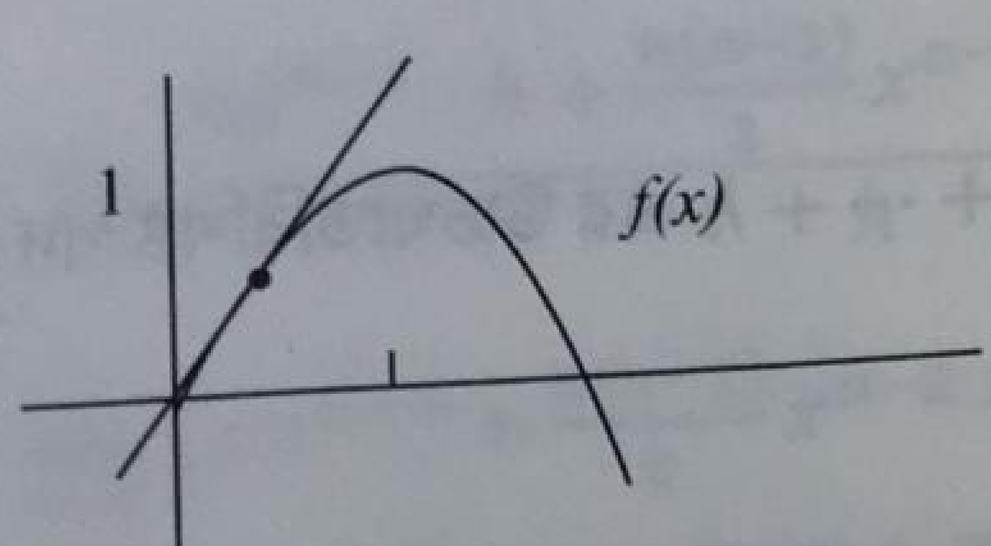
কিন্তু এ তো গেল যখন n পূর্ণসংখ্যা তখন। n যদি পূর্ণ সংখ্যা না হয় এটা তখনো আসলে খাটে! সাধারণ প্রমাণ করা হয় নিউটনের সাধারণ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে।

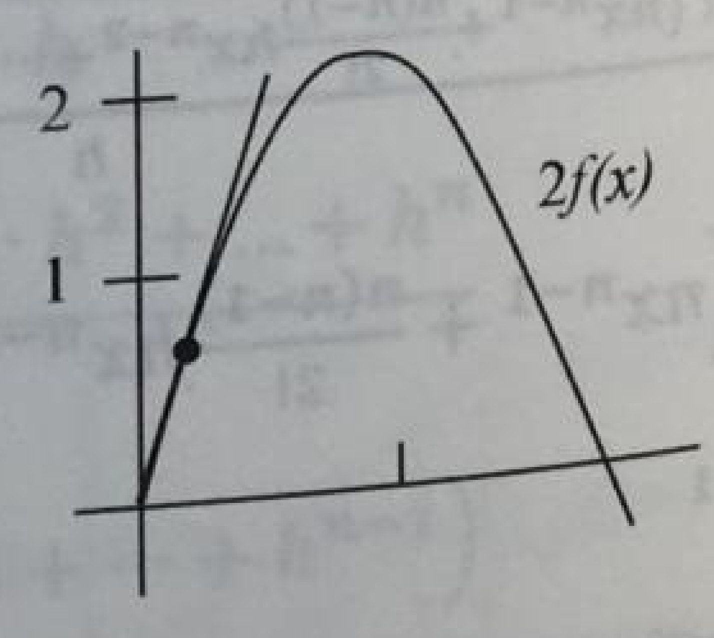
উদাহরণ ৫.৩: ফাংশনের সাথে ধ্রুবক গুণ থাকলে তার ডিফারেন্সিয়েশন। দেখাও যে, $g(x) = cf(x)$ হলে $g'(x) = cf'(x)$।

মূল নিয়মে,

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} c \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= c\cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

এটা আসলে কী হলো, ছবিতে বোঝার চেষ্টা করো-





ফাংশনের বাইরে দুই দিয়ে গুণ করা মানে তার ঢালও দুই গুণ খাড়া হয়ে যাবে! আগে x এর মান এক বাড়লে যদি y পাঁচ বাড়ত, এখন বাড়বে দশ।

উদাহরণ ৫.৪: দেখাও যে $f(x) = e^x$ হলে $f'(x) = e^x$.

মূল নিয়মে, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

[এখানে e^x কে এভাবে আলাদা করে নিতে পারি কারণ h এর সঙ্গে তার কোনো সম্পর্ক নাই।]

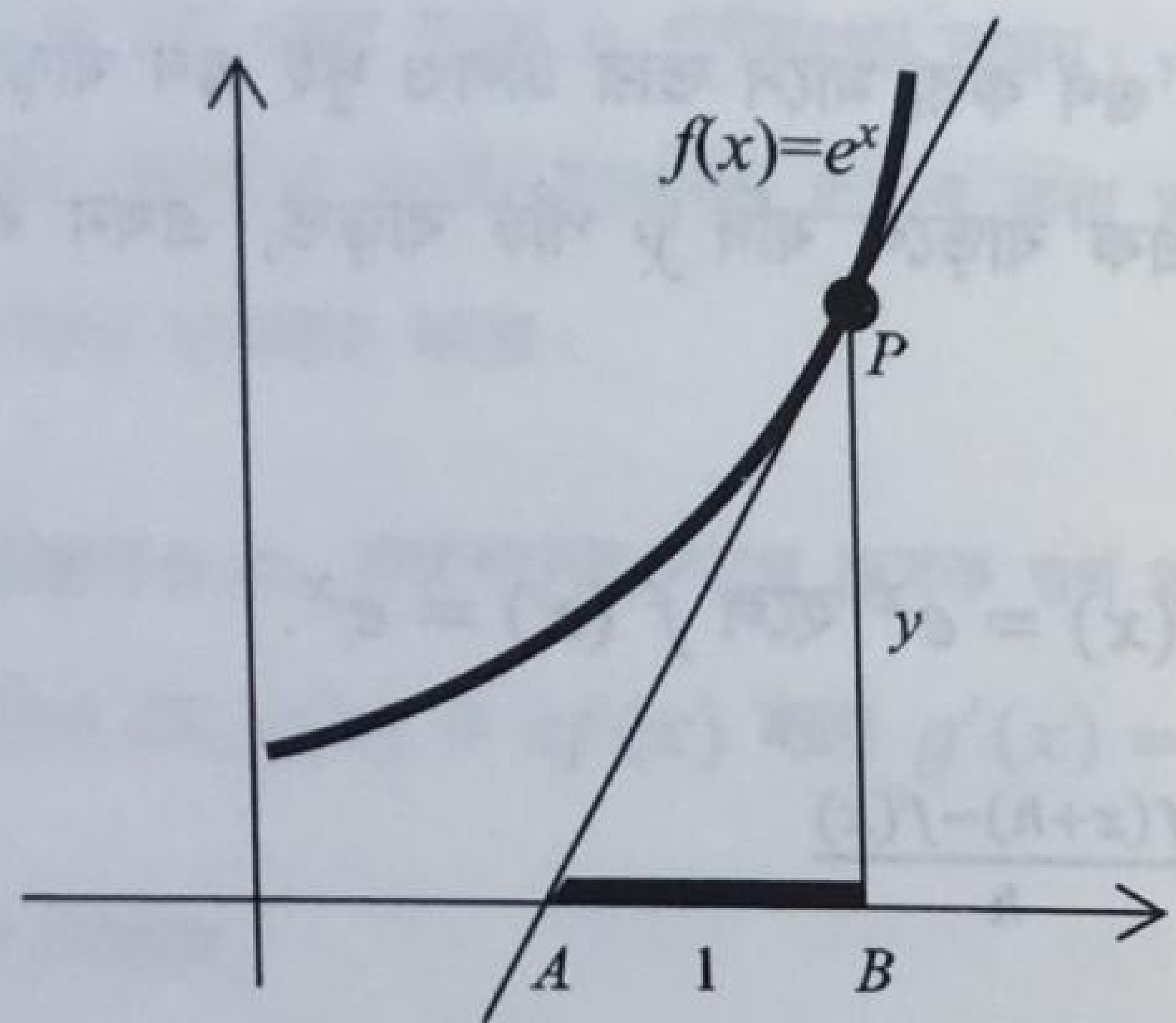
$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\right)-1}{h}$$

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots+h\text{ এরউঁচুঘাতওয়ালাপদ}}{h}$$

$$= e^x \cdot \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots+h\text{ এরউঁচুঘাতওয়ালাপদ}\right)$$

$$= e^x \cdot 1 = e^x$$

কী অবাক ব্যাপার! e^x-এর ডিফারেন্সিয়েশন e^x। মানে যে বিন্দুতে ফাংশনের মান যত, ঐ বিন্দুতে ঢালও তত!



আরেকটা মজার ব্যাপার এখানে ভাবতে পারো। e^x-এর ওপর যে বিন্দুতেই স্পর্শক আঁকো, সেটা $X-$ অক্ষকে যেখানে ছেদ করবে (A) আর ওই বিন্দু থেকে $X-$ অক্ষের ওপর লম্বের পাদবিন্দু (B) -এ দুটোর দূরত্ব, AB সবসময় 1 হবে!

ঢাল $=\frac{PB}{AB}$। এখানে, $PB = y =$ ঢাল, তাহলে নিশ্চয়ই $AB = 1$.

উদাহরণ ৫.৫: মূল নিয়মে অন্তরীকরণ করো- $f(x) = \ln x$ ।

মূল নিয়মে,

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\ln\frac{x+h}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

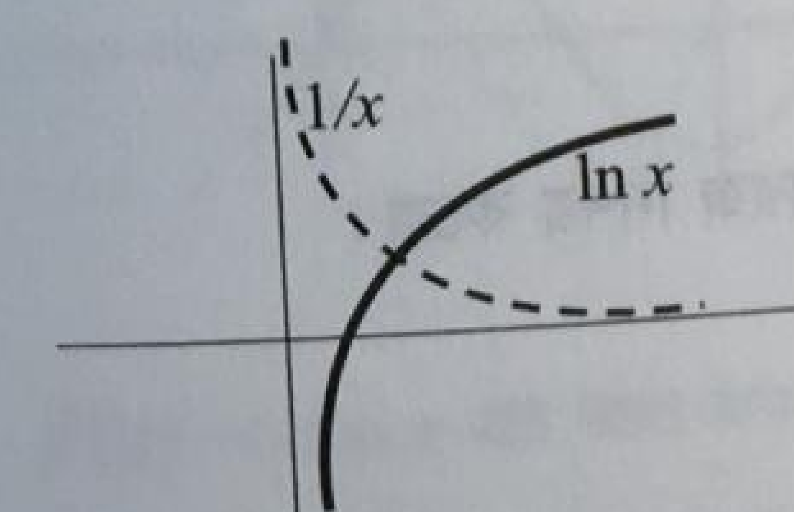
$$= \lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{x}-\frac{\frac{h^2}{x^2}}{2}+\frac{\frac{h^3}{x^3}}{3}-\cdots}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{h\left(\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\cdots h \text{ ওয়ালাপদ}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}\right.$$
$$\left. -\cdots \text{আরও অনেক } h \text{ ওয়ালাপদ}\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

এইটা একটু অদ্ভুত ফলাফল। $\ln x$ -এর মতো একটা ফাংশন ডিফারেন্সিয়েট করে একটা বীজগাণিতিক ফাংশন হয়ে গেল! এটা পরে ইন্টিগ্রেশনের সময় আরও কাজে লাগবে। আর হ্যাঁ, এই সূত্র শুধু $x > 0$-এর জন্য সত্য। $\ln x$-এর মান 0 কিংবা তার ছোট হয় না।



উদাহরণ ৫.৬: মূল নিয়মে $\sin x$ -এর অন্তরজ নির্ণয় করো।

ধরি, $f(x) = \sin x$

মূল নিয়ম হতে,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} \quad \left[\begin{aligned}&\sin C - \sin D = \\ &2\cos\tfrac{C+D}{2}\sin\tfrac{C-D}{2}\end{aligned}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{2\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}}$$ [সাজিয়ে গুছিয়ে পাই]

সাজিয়ে গুছিয়ে

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos\frac{2x}{2}\cdot 1$$

$$= \cos x$$

উদাহরণ ৫.৬: মূল নিয়মে $\cos x$-এর অন্তরজ নির্ণয় করো।

ধরি, $f(x) = \cos x$

মূল নিয়মে,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x-h-x}{2}}{h} \quad \left[\begin{aligned}&\cos C - \cos D = \\ &2\sin\tfrac{C+D}{2}\sin\tfrac{D-C}{2}\end{aligned}\right]$$

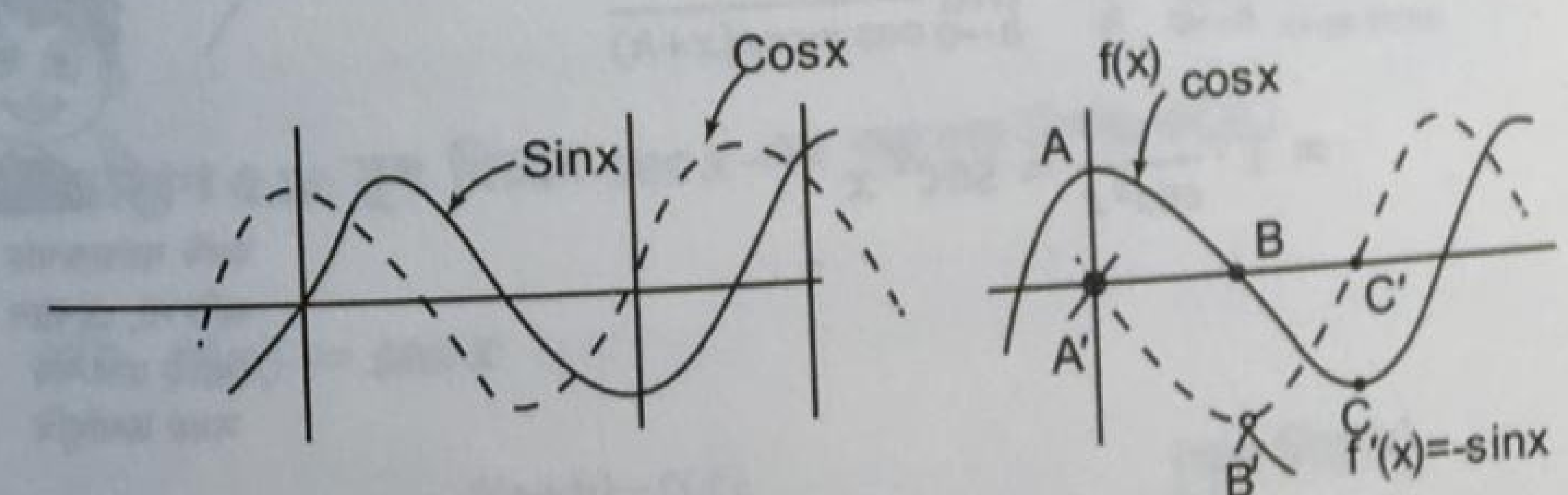
$$= \lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{-2\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}}$$ [সাজিয়ে গুছিয়ে পাই]

$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin\frac{2x}{2}\cdot 1$$

$$= -\sin x$$

খেয়াল করো $\sin x$ -এর মান যেখানে বেড়ে যাবে, ঢাল যেখানে ধনাত্মক $\cos x$ সেখানে ধনাত্মক।



$f(x) = \cos x$ এর জন্য লক্ষ্য করো। শুরুতেই সর্বোচ্চ। এরপর কমতে থাকে ধীরে ধীরে। $x = 0$ তে, $\cos x = 1$. A বিন্দুতে তাকাও। সেখানে ঢাল শূন্য(A')। এরপর, B তে গিয়ে $\cos x$ নিজে শূন্য। সেখানে তার

অধঃপতনের গতি সবচেয়ে বেশি (B')। এভাবে বাকি বিন্দুগুলোতে চিন্তা করো। C তে কী হচ্ছে, বলো তো?

উদাহরণ ৫.৭: মূল নিয়মে $\tan x$-এর অন্তরজ নির্ণয় করো।

ধরি, $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[মূল নিয়মে]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} \quad \left[\begin{array}{r} f(x)=\tan x \\ \therefore f(x+h)=\tan(x+h)\end{array}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right\}$$

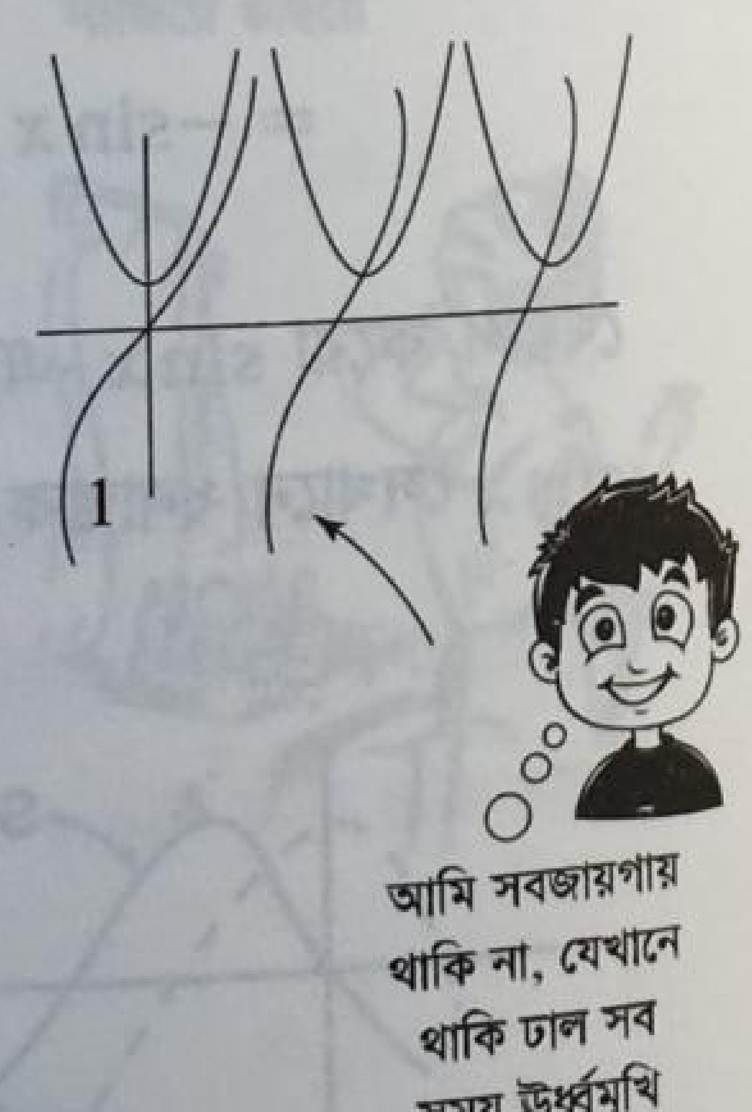
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\cos x\sin(x+h)-\sin x\cos(x+h)}{\cos x\cdot\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x+h-x)}{\cos x\cdot\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+h)}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$



উদাহরণ ৫.৮: মূল নিয়মে $\cot x$-এর অন্তরজ নির্ণয় করো।

ধরি, $f(x) = \cot x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[মূল নিয়মে]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

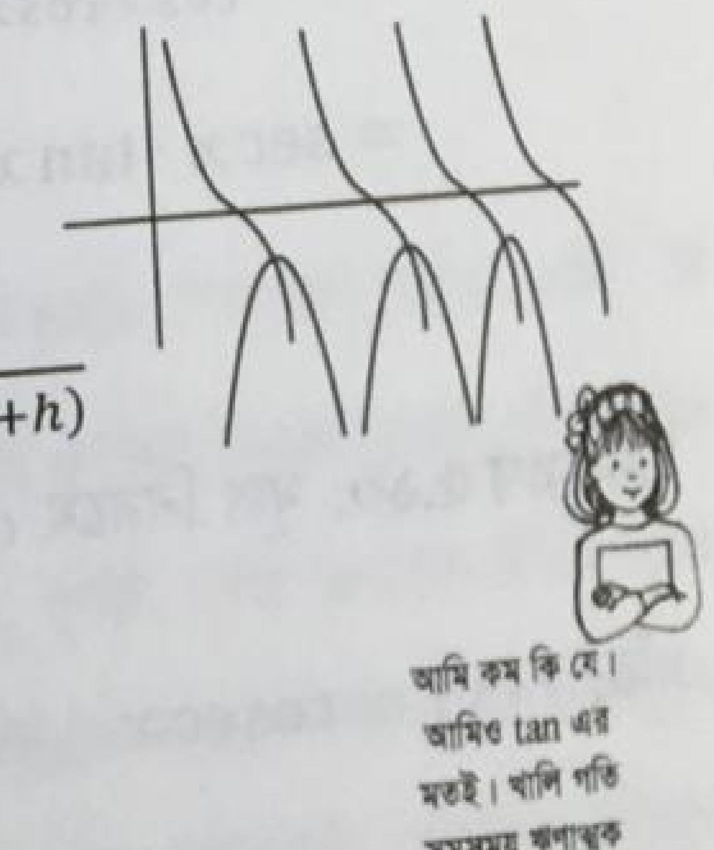
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin x\cos(x+h)-\cos x\sin(x+h)}{\sin x\cdot\sin(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{-\sin h}{\sin x\cdot\sin(x+h)}\right\}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin x\cdot\sin(x+h)}$$

$$= -1\cdot\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$



উদাহরণ ৫.৯: মূল নিয়মে $\sec x$-এর অন্তরজ নির্ণয় করো।

ধরি, $f(x) = \sec x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{[মূল নিয়মে]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$$

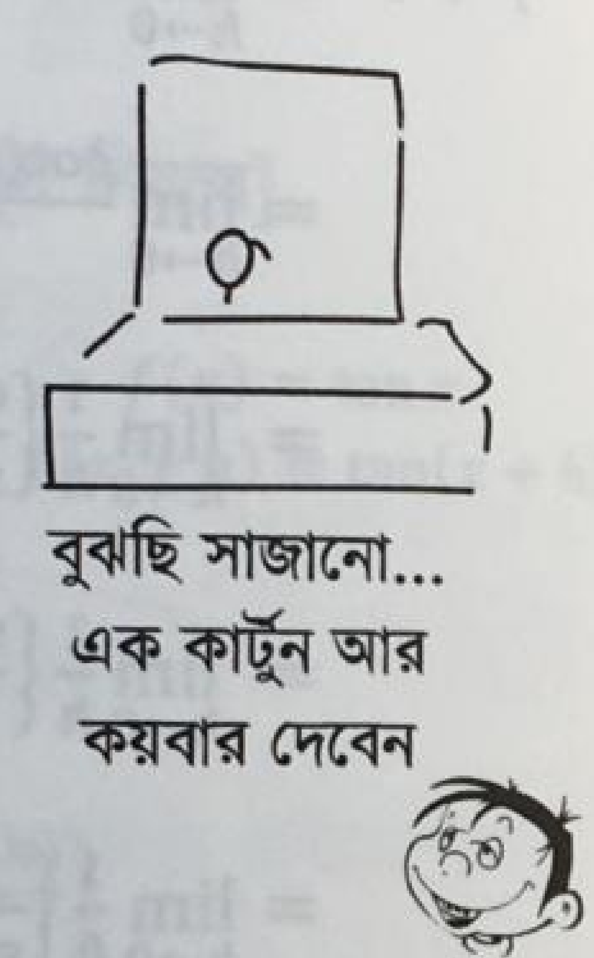
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\cos x-\cos(x+h)}{\cos x\cdot\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{2\sin\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{\cos x\cdot\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\cdot\sin\frac{h}{2}}{\cos x\cdot\cos(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+\frac{h}{2})}{\cos x\cdot\cos(x+h)}$$



$$= 1\cdot\frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x\cdot\tan x$$

উদাহরণ ৫.১০: মূল নিয়মে $\operatorname{cosec} x$-এর অন্তরজ নির্ণয় করো।

ধরি, $f(x)=\operatorname{cosec} x$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{[মূল নিয়মে]}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin x}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin x-\sin(x+h)}{\sin x\cdot\sin(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{2\cos\frac{x+x+h}{2}\cdot\sin\frac{x-x-h}{2}}{\sin x\cdot\sin(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{-2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\sin\frac{h}{2}}{\sin x\cdot\sin(x+h)}\right\}$$

$$= -\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+\frac{h}{2})}{\sin x\cdot\sin(x+h)}$$

$$= -1\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}=-\cot x\cdot\operatorname{cosec} x$$

$$= -\operatorname{cosec} x\cdot\cot x$$

৫.৩ ইতিহাসের পাতা থেকে:

প্রিয়েরে দ্য ফার্মা: আমরা ক্যালকুলাসে যেভাবে স্পর্শকরেখার ঢাল বা সমীকরণ বের করি, সেটার কাছাকাছি একটা ধারণা দিয়েছিলেন গণিতবিদ ফার্মা। একটা ফাংশন কোথায় সর্বোচ্চ হবে, সেটা বের করতে তিনি এক দারুণ চিন্তা করলেন। বললেন, সর্বোচ্চ বিন্দুতে কাছাকাছি দুইটা বিন্দুতে ফাংশনের মান সমান হয়। এখানে দুটোর মান আলাদা, সর্বোচ্চ বিন্দুর কাছে মান সমান।

তিনি বললেন একটু অন্যভাবে। সর্বোচ্চ বিন্দুতে $f(A)\sim f(A+e)$, যেখানে e খুব ছোট।

এখান থেকে ফার্মা ওই সর্বোচ্চ বিন্দুর ভুজ, কোটি বের করে ফেলতে পেরেছিলেন।

$$
\begin{aligned}
-A^2 + 6A - 5 &= -(A+e)^2 + 6(A+e) - 5 \\
&= -A^2 - 2Ae - e^2 + 6A + 6e - 5 \\
&= 2Ae + e^2 - 6e = 0
\end{aligned}
$$

e ছোট হলে e^2 আরও অনেক ছোট। একে শূন্য ধরে পাই, $2Ae - 6e = 0$বা, $A = 3$.

এটাই ছিল ঠিক উত্তর।

এই নিয়মটাকে ফার্মা নাম দিয়েছিলেন Method of adequality বা 'প্রায়' সমান হওয়ার নিয়ম।

অধ্যায় ৬

অন্তরীকরণের কলাকৌশল

৬.১ যোগ আর বিয়োগের নিয়ম:

দুটো ফাংশনের যোগফলের বা বিয়োগফলের অন্তরজ ফাংশন দুটোর অন্তরজের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান।

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

চলো যোগের জন্য প্রমাণটা দেখি। বিয়োগেরটা তোমরা একইভাবে ভাবতে পারবে।

ধরি, $F(x) = f(x) + g(x)$

তাহলে মূল নিয়মে, $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

বা, $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

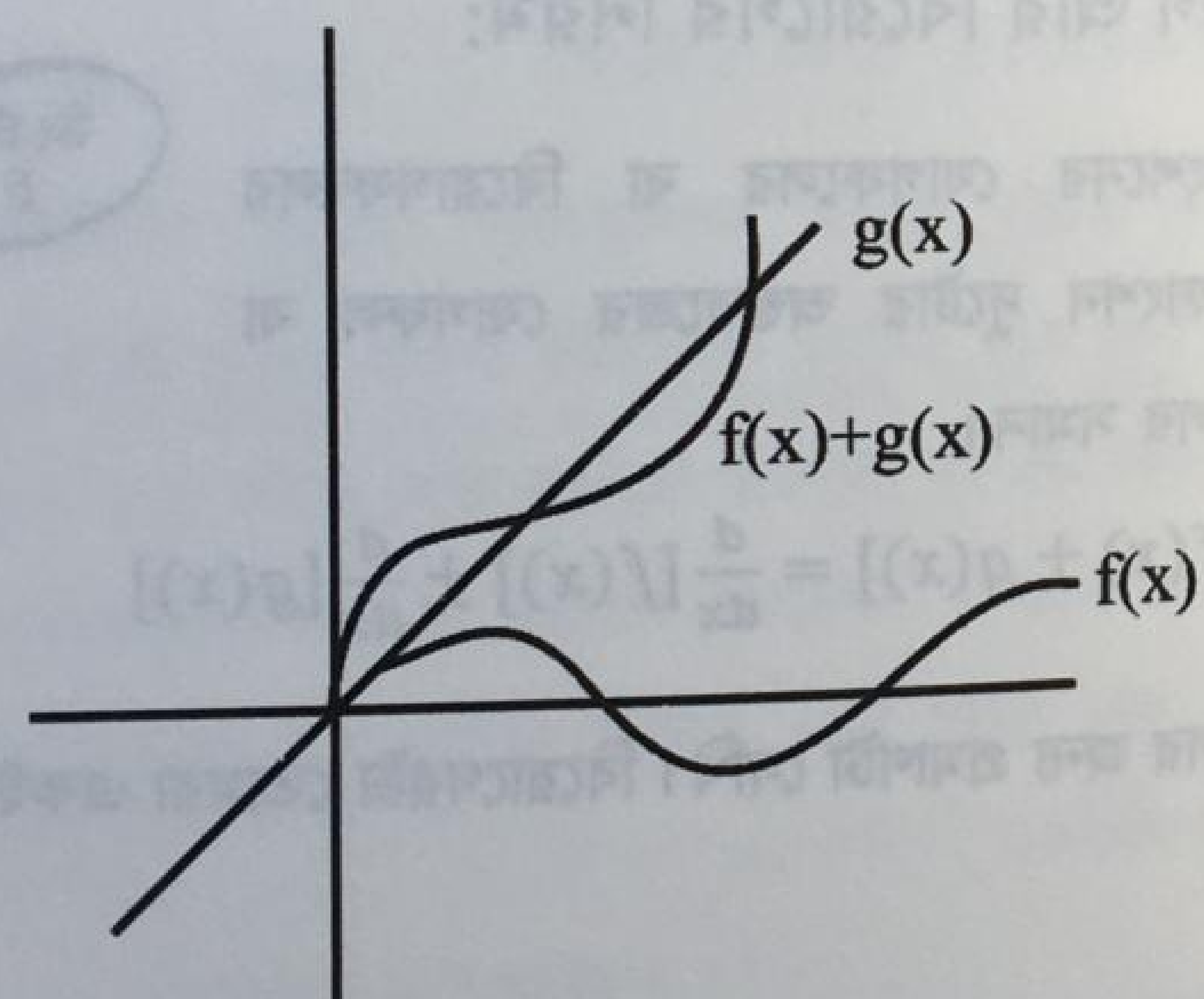
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

বুঝতেই পারছ যোগের ব্যাপারটা যদি দুটো ফাংশনের জন্য সত্যি হয় তাহলে 3টা, 4টা যতগুলোই নাও সবার জন্য সত্যি হবে।

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + alu(x) + potol(x) + mula(x)]$
$$= f'(x) + g'(x) + alu'(x) + potol'(x) + mula'(x)$$

একই কথা বিয়োগের বেলায়ও সত্য।

কেন ঢাল যোগ হয়ে যাচ্ছে, যদি কেউ অনুভব করতে চাও, কোনো একটা বিন্দুতে ভাবতে পারে।



ধরো, x-এর মান 1 বাড়লে $f(x)$-এ বাড়ছিল 1

x-এর মান 1 বাড়লে $g(x)$-এ বাড়ছিল 2

তাহলে x-এর মান 1 বাড়লে $f(x) + g(x)$-এ বাড়বে 3।

মেলা কথা হয়েছে, চলো অঙ্ক করি!!!

আগের অধ্যায়ে আমরা শিখেছি $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$

আরও শিখেছি $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

এই দুটো তথ্য আর একটু আগে শেখা যোগের নিয়ম জানলে যেকোনো বহুপদী ফাংশনের অন্তরজ (derivative) বের করে ফেলা যায়। চলো আমরা এমন 200 টা অঙ্ক করি।

উদাহরণ 6.1 $f(x) = 100x^3 + 200x^2 + 500$ হলে $\frac{d}{dx}[f(x)]$=?

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(100x^3) + \frac{d}{dx}(200x^2) + \frac{d}{dx}(500)$$
$$= 100\frac{d}{dx}(x^3) + 200\frac{d}{dx}(x^2) + 0$$
$$= 100 \times 3x^2 + 200 \times 2x$$
$$= 300x^2 + 400x$$

দ্বিতীয় লাইনে দেখো, সহগগুলো বাইরে বের হয়ে এসেছে।

উদাহরণ 6.2 $\frac{d}{dx}(9x^5 + 6x^3 + 7x) =?$

$$\frac{d}{dx}(9x^5 + 6x^3 + 7x)$$
$$= \frac{d}{dx}(9x^5) + \frac{d}{dx}(6x^3) + \frac{d}{dx}(7x) \quad \text{[যোগের সূত্র]}$$
$$= 9\frac{d}{dx}(x^5) + 6\frac{d}{dx}(x^3) + 7\frac{d}{dx}(x)$$
$$= 9 \times 5x^4 + 6 \times 3x^2 + 7 \times 1 \quad \left[\because \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\right]$$
$$= 45x^4 + 18x^2 + 7$$

একই অঙ্ক এবার শর্টকাটে করা যাক। দেখো $\frac{d}{dx}(9x^5 + 6x^3 + 7x)$এর উত্তর 1 লাইনে লিখে দেওয়া যায়। $9x^5$-এর 5 আর 9 গুণ হয়ে যাবে, x-এর পাওয়ার 1 কমবে। $\frac{d}{dx}(9x^5) = 45x^4$। কেন হলো সেটা ওপরের

অঙ্কটার দিকে তাকালেই বুঝে যাবে। $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$। ওই5টা সামনে চলে আসবে। সে আগে থেকে ওখানে থাকা 9-এর সাথে গুণ হয়ে যাবে তাহলে চটপট করি, $\frac{d}{dx}(6x^3)$ =তিন ছয়ে আঠারো, x-এর পাওয়ার 2। $\frac{d}{dx}(7x) = 7$ যদি x-এর পাওয়ার 1 হয় তাকে ডিফারেন্সিয়েট করলে $1x^{1-1} = 1x^0 = 1 \times 1 = 1$ হবে। ভেতরে শুধু x থাকলে, ডিফারেন্সিয়েট করলে সহগটুকুই পড়ে থাকবে।

এবার ঝটপট দেখো:

3. $\frac{d}{dx}(10x^5 + 9x^4 - 3x^2) = 50x^4 + 36x^3 - 6x$
4. $\frac{d}{dx}(20x^3 + 5x + 6) = 60x^2 + 5$

[6 কে ডিফারেন্সিয়েট করলে শূন্য আসবে। অমন ধ্রুবর দিকে তাকানোরই দরকার নেই!]

তাহলে তোমরা এবার লেখো তো দেখি:

5. $\frac{d}{dx}(15x^2 + 7x + 5) =$ $30x + 7$
6. $\frac{d}{dx}(20x^4 + 8x^2 + 9x) =$ $80x^3 + 16x + 9$

বলেছিলাম 200 টা অঙ্ক করব। 4টা করে দিয়েছি, 2টা করতে দিয়েছি। বাকিগুলো তোমরা বানাও!! আচ্ছা থাক, অত লাগবে না। শুধু 4টা অঙ্ক বানাও।

7. $\frac{d}{dx}(12x^4 + 5x^3 + 8) = 48x^3 + 15x^2$
8. $\frac{d}{dx}(30x^2 + 15x + 6) = 60x + 15$
9. $\frac{d}{dx}(50x^5 + 60x^4 + 30x^3) = 250x^4 + 240x^3 + 90x^2$
10. $\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = 2x + 1$

ও হ্যাঁ, শুধু বহুপদী ফাংশনই নয় আমরা এখন অনেক রকম ফাংশনের অন্তরজ বের করতে পারি। আগের অধ্যায়ে মূল নিয়মে পাওয়া সূত্রগুলো একবার দেখে নাও।

মনে রেখো-

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = \sin x$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
$\frac{d}{dx} = (e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \ln x$	$\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec} x) = -\mathrm{cosec} x \cdot \cot x$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

উদাহরণ 6.3 সূত্রগুলো জানলে বলো তো $2e^x + 5x^2 + 4\sin x$ এর অন্তরজ কত হবে?

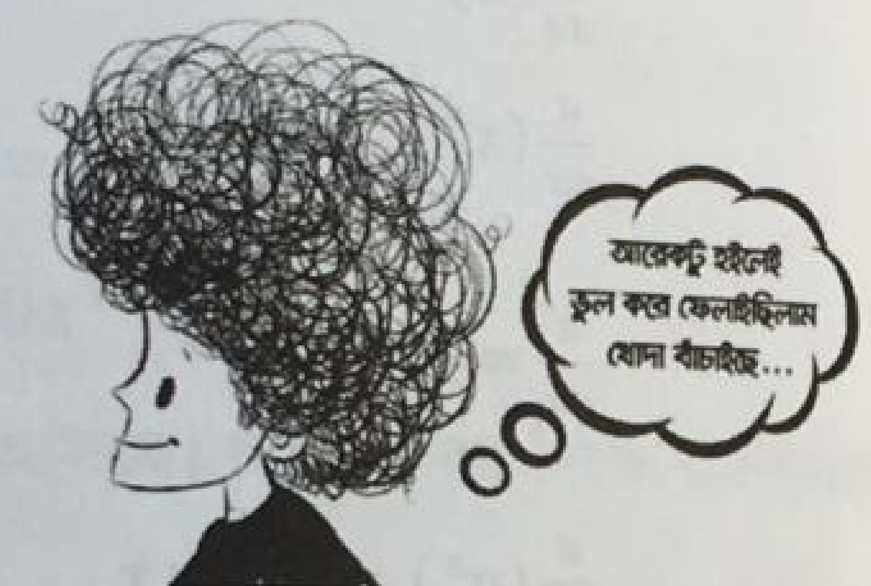
এটা হবে
$$= \frac{d}{dx}(2e^x) + \frac{d}{dx}(5x^2) + \frac{d}{dx}(4\sin x)$$
$$= 2 \cdot \frac{d}{dx}(e^x) + 10x + 4\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= 2e^x + 10x + 4\cos x$$

৬.২ গুণের সূত্র

লিবনিজ শুরুতে ভেবেছিলেন এটাও মনে হয় যোগ-বিয়োগের সূত্রের মতোই হবে। হয়তো দুটো ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ হবে আলাদা করে দুটোর অন্তরজের গুণফলের সমান। কিন্তু তিনি পরে বুঝলেন আসল ব্যাপার হলো—

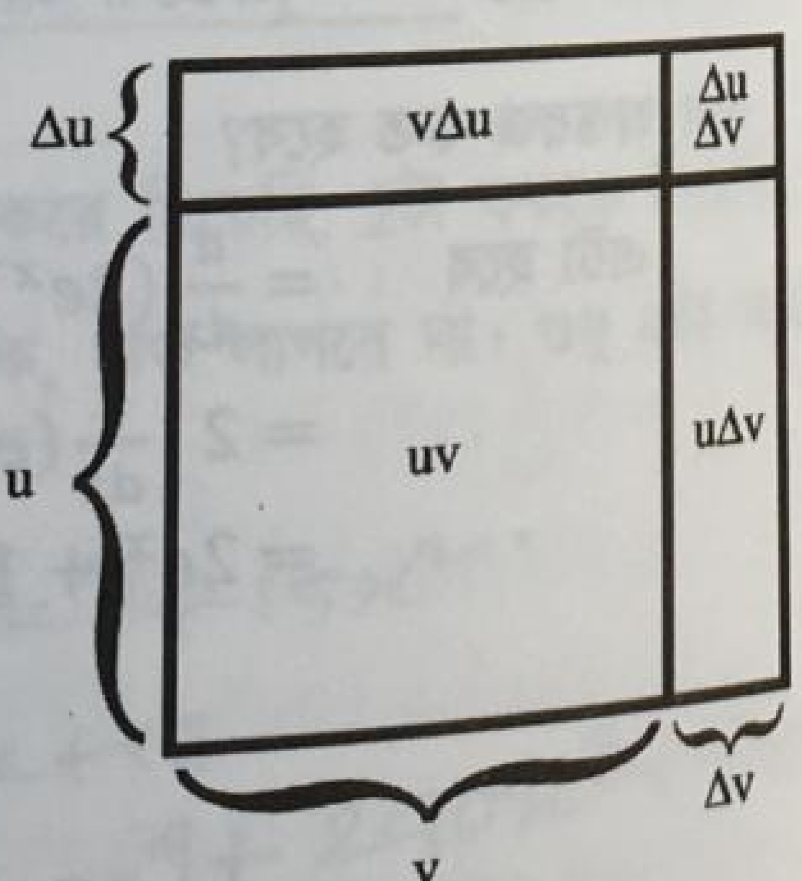
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

তার মানে বাংলায় বললে, একটা ফাংশনকে ধরে রেখে অন্যটাকে ডিফারেন্সিয়েট করো, তারপর অন্যটাকে ধরে রেখে প্রথমটাকে ডিফারেন্সিয়েট করে।



কেন এমন হলো:

এটাকে লিবনিজ ভেবেছিলেন পাশের ছবিটার মতো করে। ধরা যাক, $u = f(x)$এবং $v = g(x)$। এখন x যদি সামান্য Δxপরিমাণে পরিবর্তিত হয়ে $(x + \Delta x)$ হয়, তখন $f(x)$ আর $g(x)$ পরিবর্তিত হয়ে $f(x + \Delta x)$ আর $g(x + \Delta x)$ হবে।



$f(x)$যতটুকু বদলাল, সেটাকে Δu বললে আমরা লিখতে পারি,

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$$

একইভাবে, $\Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$

ছবিতে ভাবো, আগে u আর v এদের গুণফলকে ছবির মতো 'uv' ক্ষেত্রফল দিয়ে ভাবা যায়। u আর v বেড়ে $(u + \Delta u)$ এবং $(v + \Delta v)$ হলে নতুন ক্ষেত্রফল হয় $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$।

ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন $\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v \ldots \text{(i)}$$

মূল নিয়ম থেকে আমরা জানি,

যেকোনো ফাংশন f-এর অন্তরজ $f' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

এখানে h কিন্তু x-এর সামান্য পরিবর্তন Δx আর ওপরে $f(x + h) - f(x)$-কে লেখা যায় Δf। ফলে মূল নিয়মকে এভাবেও লেখা যায়, $f'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta f}{\Delta x}$

এটা বললাম যে কারণে— ওপরে দেখো অনেকগুলো Δ আছে $\Delta(uv), \Delta v, \Delta u \rightarrow$এগুলোকে অন্তরজ বানাতে গেলে Δxদিয়ে ভাগ করে তার লিমিট শূন্য নিতে হবে।

(i) কে Δx দিয়ে ভাগ করি—

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

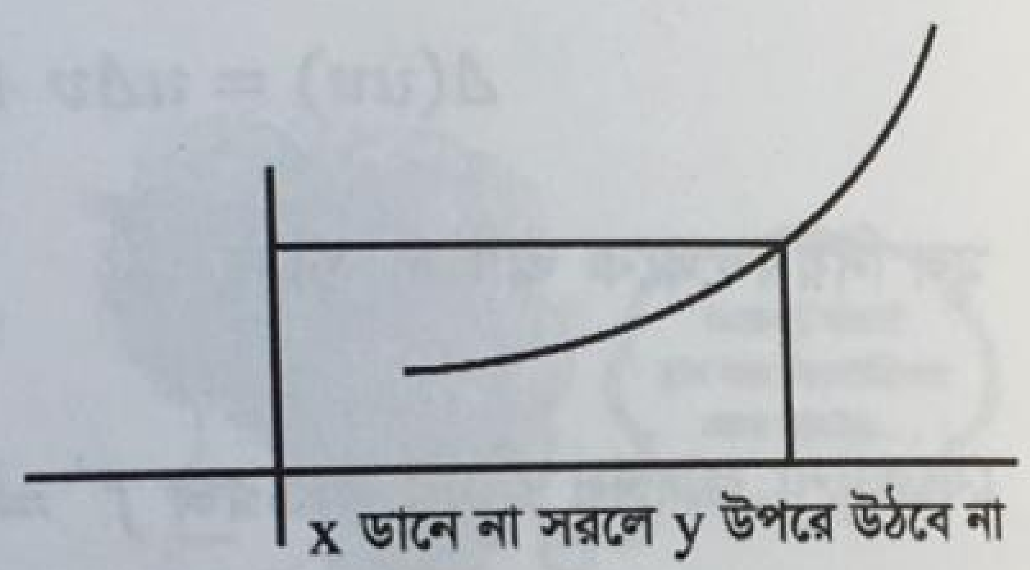
$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$$

বা, $\frac{d(uv)}{dx} = u\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] + v\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]$

কেন u আর v-কে লিমিটের বাইরে আনা গেল? কারণ—লিমিটটা Δx-এর, আর u হলো $f(x)$, অর্থাৎ Δx পরিবর্তন ঘটার আগের মান। তাই Δx-এর সাথে u এর কোনো সাধ-আহ্লাদ নাই। একই কথা v এর জন্যেও।

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u) + 0 \times \frac{d}{dx}(v)$$

শেষের 0 টার দিকে তাকাও।



যেহেতু f একটা অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন, ইনপুটের পরিবর্তন শূন্যের কোঠায় হলে আউটপুটের পরিবর্তনও শূন্যের কোঠায়। তাই $\Delta x \to 0$হলে $\Delta u \to 0$।

ব্যাস! আমরা পেয়ে গেলাম গুণের সূত্রটা-

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

এটাকে আমি বলি ভিলেন ফাইটের নিয়ম। বাংলা সিনেমায় নায়কের সামনে এল দুটো ভিলেন। তখন একটাকে দাঁড় করিয়ে নায়ক অন্যটাকে ঘুষি দেবে। এরপর ওটাকে ফেলে রেখে আরেকটাকে ঘুষি দেবে।

Knowledge is power! জ্ঞানই ক্ষমতা। গুণের সূত্রের জ্ঞান থাকলে প্রচুর অঙ্ক করার ক্ষমতা জন্মে যায়।

চলো আরও 500টা অঙ্ক করি।

উদাহরণ 6.4 অন্তরীকরণ করো:

i. $f(x) = (x+5)(x^3+8)$ ii. $f(x) = x^2e^x$

iii. $f(x) = (x^2+2)e^x \sin x$

সমাধান: i. $f(x) = (x+5)(x^3+8x)$

$$\therefore \quad f'(x) = (x+5)\frac{d}{dx}(x^3+8x) + (x^3+8x)\frac{d}{dx}(x+5)$$

$$= (x+5)(3x^2+8) + (x^3+8x)\cdot 1$$

$$= (x+5)(3x^2+8) + (x^3+8x)$$

$$= 3x^3 + 8x + 15x^2 + 40 + x^3 + 8x$$

$$= 4x^3 + 15x^2 + 16x + 40$$

আচ্ছা $f(x)$-কে আগেই গুণ করে নিয়ে differentiate করা যেত না? অবশ্যই যেত। চলো মিলিয়ে দেখি।

$$f(x) = x^4 + 8x^2 + 5x^3 + 40x$$

$$\therefore \quad f'(x) = 4x^3 + 16x + 15x^2 + 40$$

যাক! গুণের নিয়ম তাহলে ঠিকমতোই কাজ করে!

ii. $f(x) = x^2e^x$

$$\therefore \quad f'(x) = x^2\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2\cdot e^x + e^x \cdot 2x$$

$$= e^x(x^2+2x)$$

মাথা খাটাও: $e^x x^3, e^x \sin x, e^x \ln x$ এগুলো অন্তরীকরণ করো।

Shortcut বানাও: করে e^x-এর সাথে কিছু গুণ থাকলে তার অন্তরজ কী হবে একই লাইনেই কীভাবে বলে দেওয়া যায়, তার নিয়ম বানাও।

8. iii. $f(x) = (x^2+2)e^x \sin x$

তিনটি গুণ থাকলে কী করব?
প্যাকেট করে দুটো বানিয়ে নাও।

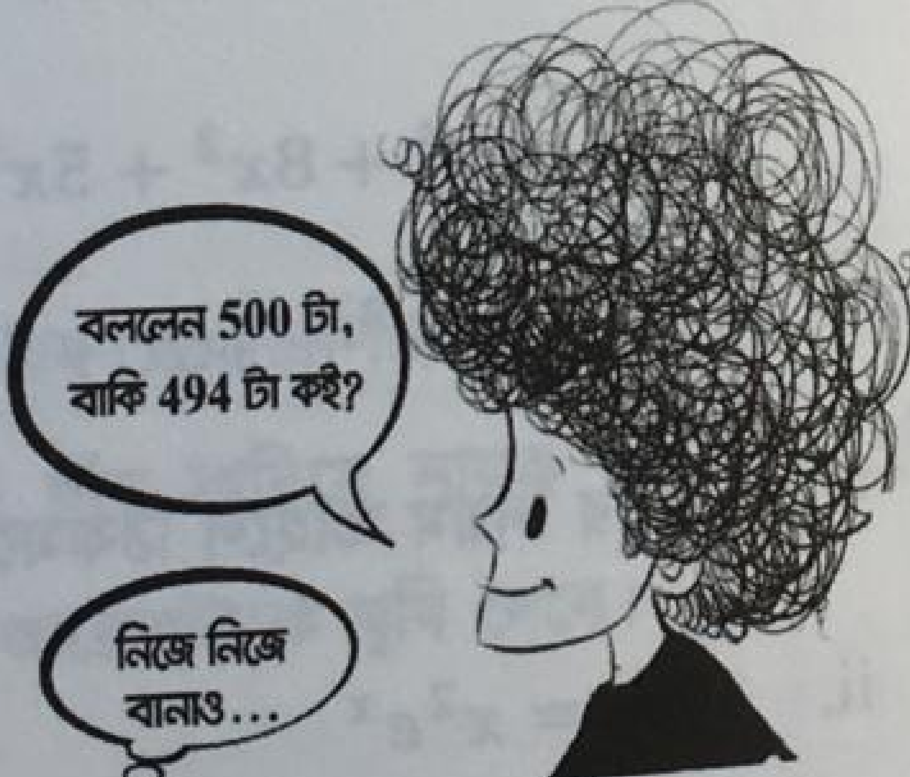
$$f'(x) = (x^2+2)\frac{d}{dx}(e^x \sin x) + e^x \sin x \frac{d}{dx}(x^2+2)$$

$$= (x^2+2)\left\{e^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(e^x)\right\} + e^x \sin x\,(2x)$$

$$= (x^2+2)\{e^x \cos x + \sin x\,.\,e^x\} + 2x.\sin x\,.\,e^x$$

$$= (x^2+2)e^x \cos x + (x^2+2)e^x \sin x + 2x.\sin x\,.\,e^x$$

এবার নিজে করো কয়েকটা। গুণের নিয়মে অন্তরীকরণ করো:



iv. $f(x) = (4x^2+5).\frac{1}{x^2}$

v. $f(x) = \tan x\,.\,e^x$

vi. $f(t) = a\sqrt{t} + bt\sqrt{t}$

৬.৩ ভাগের সূত্র (THE QUOTIENT RULE):

দুটো সুন্দর ফাংশন $u = f(x)$এবং $v = g(x)$-এর জন্য ভাগের সূত্রটা এমন $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

কীভাবে হলো? আগের মতোই ভাবো। যদি x, u, v এরা $\Delta x, \Delta u, \Delta v$ পরিমাণে পরিবর্তিত হয়, তাহলে $\frac{u}{v}$এর পরিবর্তন হবে $\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}$.

$$\therefore\quad \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u+\Delta u) - u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

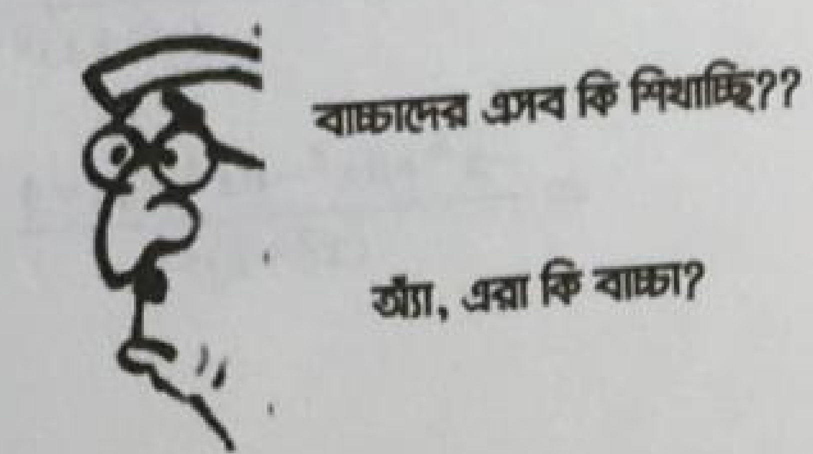
বা, $\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x}\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$ [উভয়পক্ষকে Δx দিয়ে ভাগ করে]

বা, $\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$

বা, $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0} v(v+\Delta v)}$

বা, $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ $\quad |\because \Delta x \to 0$হলে $\Delta v \to 0$

এখন আমরা আরেকটু ক্ষমতাবান হলাম। চলো ক্ষমতার ব্যবহার করি!



উদাহরণ 6.5 অন্তরীকরণ করো: (i)$f(t) = \frac{6t^4+4t^2}{t}$

$$f'(t) = \frac{t\frac{d}{dt}(6t^4+4t^2) - (6t^4+4t^2)\frac{d}{dt}(t)}{t^2}$$

$$= \frac{t(24t^3+8t)-(6t^4+4t^2)}{t^2}$$

$$= \frac{24t^4+8t^2-6t^4-4t^2}{t^2} = \frac{18t^4+4t^2}{t^2} = 18t^2+4$$

এটা উত্তর ঠিক আছে, কিন্তু এটাকে আগেই t দিয়ে ভাগ করে নেওয়া যেত না?

অবশ্যই যেত! $f(t) = \frac{6t^4+4t^2}{t} = 6t^3+4t$

$\therefore\quad f'(t) = 18t^2+4$, মিলে গেল আগের উপায়ের সাথে!

বাহ্! তার মানে ভাগের নিয়মটা ঠিক আছে।

(ii) $y = \frac{x^2-4x+2}{x^3+1}$ হলে, $y' = ?$

$$y' = \frac{(x^3+1)\frac{d}{dx}(x^24x+2)-(x^2-4x+2)\frac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{(x^3+1)(2x-4)-(x^2-4x+2)(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-4x^3+2x-4-(3x^4-12x^3+6x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{-x^4+8x^3-6x^2+2x-4}{(x^3+1)^2}$$

নিজেরা করো: নিচের রাশিগুলোকে নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করো।

i. $\frac{x^2+1}{x+1}$

ii. $\frac{2t+4t^2+5}{2t+1}$

iii. $\frac{(2\sqrt{t}+1).\sin t}{23\sqrt{t}+1}$ [গুণভাগ একসাথে থাকলে কী করব? প্যাকেট করো। আগে ভাগেরটা করা সুবিধাজনক]

অনুশীলনী: যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ মিলিত সমস্যাবলি:

অন্তরীকরণ করো—

1. $f(x) = (x^3+3x^2)e^x$
2. $f(x) = \left(\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)(x+x^4)$
3. $y = \frac{3x-1}{5x+2}$
4. $y = \frac{1}{a+be^t}$ [a, b ধ্রুব]
5. $R(t) = (t^{-2}+t^{-3})(t^5-3t^2)$
6. $V(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$
7. $y = (r^2-2r)e^r$
8. $y = \sqrt{x}e^x$
9. $y = \frac{x+1}{x^3+x-2}$

10. $h(t)=\frac{2t}{4+t^2}$

11. $f(s)=\frac{s}{(s-1)^2}$

12. $f(x)=8\cot x-7\log_2^x$

13. $f(x)=x-3\log_a x+7\sin x$

14. $f(x)=(cx)^n+(a^3x^3)^m$

15. $F(t)=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

16. $f(x)=2x^b+5e^x-x^3$

17. $F(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$ [hint: কেটো না]

18. $g(x)=6x^4-7x^{-1/2}$

19. $h(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^5}$

20. $y(x)=e^x\sin x-5x^2\log x$

৬.৪ শিকল সূত্র (CHAIN RULE): [পাপ ও প্রায়শ্চিত্তের নীতি, আমার ভাষায়]

শুনে রাখো এটা হলো অন্তরীকরণ বা differentiation-এর সব থেকে গুরুত্বপূর্ণ কৌশল। তুমি যদি এটা শিখে ফেলতে পারো, differentiation করা কোনো ব্যাপারই না। এই নিয়মটা মূলত সংযোজিক ফাংশন বা যৌগিক ফাংশন (composite function)-এর জন্য তৈরি। একটা সহজ উদাহরণ ভাবো, $y=e^{(x^2+1)}$।

আমরা e-এর সূত্র জানি, (x^2+1) কে ডিফারেন্সিয়েট করলে কী পাব সেটাও জানি। কিন্তু একটার মধ্যে আরেকটি থাকলে তখন কী হবে?

প্রথমে আমরা (x^2+1) কে z ধরে নিই। তাহলে বলতে পারি, $y=e^z$। এখান থেকে চিন্তা করা যায় y হলো z-এর একটা ফাংশন।

এবার আমাদের বের করতে হচ্ছে $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[e^{(x^2+1)}\right]=\frac{d}{dx}e^z$।

কিন্তু x-এর সাপেক্ষে z-এর ফাংশনের অন্তরীকরণ কীভাবে করব?

তার জন্য ছোট একটা নিয়ম শিখব। ধরো, x-এর সামান্য পরিবর্তন Δx-এর জন্য y ও z-এর পরিবর্তন হয়েছে Δyও Δz। তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{\Delta y}{dx}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\text{বা, }\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dx}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$$

$$\text{বা, }\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dx}=\left(\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$$

[নিচে Δx থেকে Δz কীভাবে হলো? খেয়াল করো z কিন্তু x-এরও ফাংশন। $\Delta x \to 0$হলে $\Delta z \to 0$]

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$, এটাকে অন্তরীকরণের চেইন রুল বা শৃঙ্খল সূত্র বলে।

মনে রেখো

শিকল সূত্র: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$

অর্থাৎ z-এর ফাংশনকে আগে z-এর সাপেক্ষেই ডিফারেন্সিয়েশন করে ফেলব। তারপর x-এর সাপেক্ষে z-এর ডিফারেন্সিয়েশন করো।

আমরা ধরেছিলাম, $y = e^z$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

আবার, $z = x^2 + 1$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = e^z.2x = e^{x^2+1}.2x$$

এই যে আমরা বললাম, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$ - চলো, এটার আসল মানেটা কী বোঝার চেষ্টা করি।

আমাদের দেখতে হবে x-এর সাপেক্ষে y কত দ্রুত পরিবর্তিত হচ্ছে। একটা উদাহরণ ভাবো।

ধরো, আমরা দেখলাম, z-এর ওপর কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 3

অর্থাৎ x-এর মান 1 বাড়লে z বাড়ে 3।

আবার মনে করো আমরা দেখলাম z-এর মান 1 বাড়লে y বাড়ে 5।

তাহলে, x-এর মান 1 বাড়লে y কত বাড়বে? নিশ্চয়ই $3 \times 5 = 15$

$$15 = 5 \times 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$$

যাহোক, খেয়াল করো- এটা আসলে আরও লম্বা শিকল বানানো যায়।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dz}.\frac{dz}{dx}$$

এ নিয়মটা খুব ভালো করে আত্মস্থ করা জরুরি। তাই অনেকগুলো উদাহরণ করতে হবে। ধাপে চিন্তা করো তাহলে বুঝতে সুবিধা হবে।

উদাহরণ 6.6 $y = \ln(1+x^2)$ হলে, $y' = ?$

ধাপ—1: ভেতরের ফাংশনটা চিহ্নিত করে তাকে কিছু একটা ধরো। x-এর সাপেক্ষে তার অন্তরীকরণ করো।

ধরি, $z = 1 + x^2$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 2x$$

ধাপ—2: যা ধরেছ তার সাপেক্ষে পুরোটার অন্তরীকরণ করো।

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}$$

ধাপ—3: দুটো গুণ করে যা ধরেছ ওপর মান বসাও।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \times 2x$$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$ [z এর মান বসিয়ে]

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$

আবার দেখি আরেকটা:

উদাহরণ 6.7 $y = \sin(x^3 + 4x)$ হলে, $y' = ?$

ধাপ—1: ধরি, $z = x^3 + 4x$

$\therefore \frac{dz}{dx} = 3x^2 + 4$

ধাপ—2: $y = \sin z$

$\therefore \frac{dy}{dz} = \cos z$

ধাপ—3: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$= (\cos z) \cdot (3x^2 + 4)$

$= (3x^2 + 4).\cos(x^3 + 4x)$ [গুণ করে মান বসাও]

আরও উদাহরণ:

উদাহরণ 6.8 $y = (3x - 5)^4$ হলে, $y' = ?$

ধরি, $z = 3x - 5$

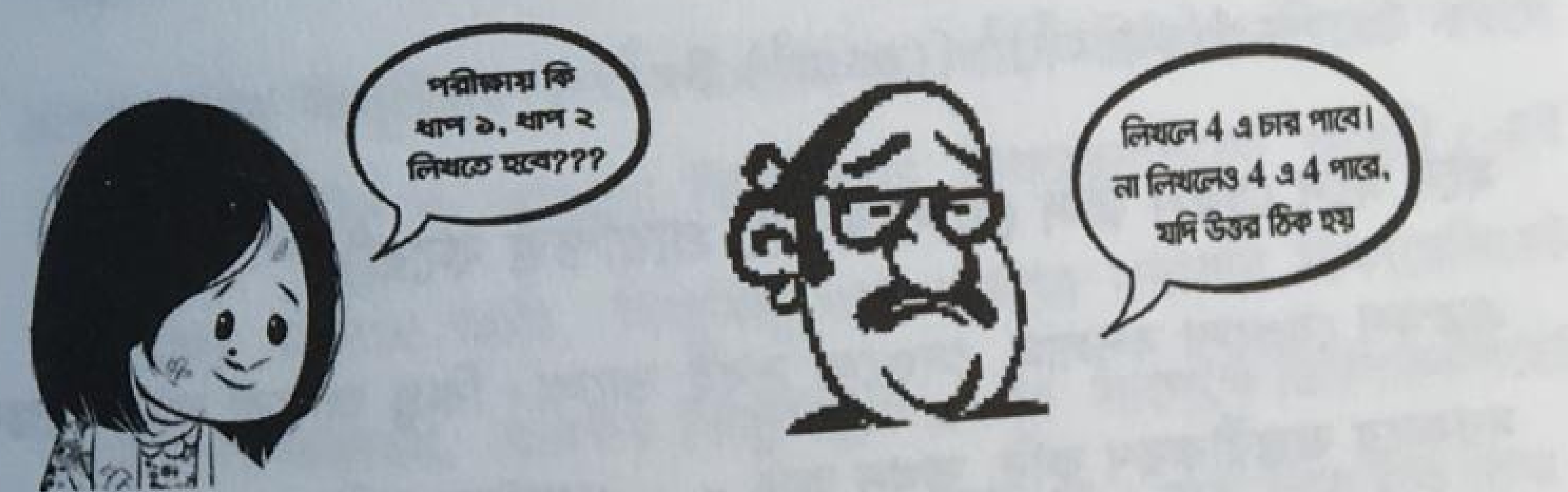
$\therefore \frac{dz}{dx} = 3$ [x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

দেওয়া আছে, $y = (3x - 5)^4$

বা, $y = z^4$

$\therefore \frac{dy}{dz} = 4z^3$ [z এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

তাহলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 4z^3.3 = 12(3x - 5)^3$



আরও একটা উদাহরণ দেখি চলো-

উদাহরণ 6.9 $y = \sin^4 x^3$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

এবার দেখো আরও ঝামেলা। এটাকে $y = (\sin x^3)^4$ লেখা যায়।

একেবারে ভেতরে আছে x^3

ধরি, $z = x^3$

$\therefore \frac{dz}{dx} = 3x^2$

সুতরাং $y = (\sin z)^4$

কী করা যায়? কোনো সমস্যা নাই! ভেতরে যেটা অছে তাকে আবার কিন্তু ধরো, ধরি $u = \sin z$

$$\therefore \quad \frac{du}{dz} = \cos z$$

তাহলে পাচ্ছি, $y = u^4$

বা, $\frac{dy}{du} = 4u^3$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dz}.\frac{dz}{dx} = 4u^3.\cos z.3x^2$$

$$= 4(\sin z)^3.(\cos x^3).3x^2 \text{ [}u = \sin z \text{ ও } z = x^3 \text{ বসিয়ে]}$$

$$= 4(\sin x^3)^3.(\cos x^3).3x^2$$

মনে মনে চেইন রুল (পাপ করো, প্রায়শ্চিত্ত করো):

এতক্ষণ যেগুলো বললাম, সেগুলো সবই ভালো। কিন্তু আমরা যখন বাস্তব দরকারে অন্তরীকরণ করি, তখন অত z, u ধরেটরে করি না। মনে মনেই করে ফেলি এবং সেটা কঠিন কিছু না! শিখে ফেলো!

উদাহরণ 6.9 $\quad y = \sin(x^2+1)$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

এটা আসলে একবারেই লিখে ফেলা যায়: $\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+1)\cdot(2x)$

আমি কীভাবে এই অঙ্কগুলো চিন্তা করি সেটা বলি। আমি জানি $\sin x$ কে ডিফারেন্সিয়েট করলে হয় $\cos x$। ওখান থেকে ভাবি, $\sin($***কিছুমিছু***$)$কে ডিফারেন্সিয়েট করলে হয় $\cos($***কিছুমিছু***$)$ । $\sin(x^2+1)$ কে ডিফারেন্সিয়েট করলে হয় $\cos(x^2+1)$। অর্থাৎ ভিতরে যা থাকে থাকুক, সেটাকে x এর মতো করে ভেবে ডিফারেন্সিয়েট করে ফেলি। তারপর ভাবি, হায় হায় এ আমি কী করলাম! এটা তো x না, আমার একটা পাপ হয়ে গেল! তাহলে প্রায়শ্চিত্ত করা দরকার। প্রায়শ্চিত্ত হলো, ঐ **কিছুমিছু**কে আবার x এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করা। **কিছুমিছু** দিয়ে পুরোটাকে এভাবে দেখানো যায়-

$y = \sin($***কিছুমিছু***$)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = \cos($***কিছুমিছু***$)\cdot\frac{d}{dx}($***কিছুমিছু***$)$

উদাহরণ 6.10 $\quad y = (\ln x)^4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4\,(\ln x)^3 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 4\,(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

এখানে ছিল **কিছুমিছু**র উপর পাওয়ার 4। তাকে ডিফারেনশিয়েট করলে হয় $4\cdot($***কিছুমিছু***$)^3$। তারপর **কিছুমিছু**কে ডিফারেনশিয়েট করেছি x-এর সাপেক্ষে। এভাবে আমি, **কিছুমিছু** ধরা অবস্থায় সরাসরি ডিফারেন্সিয়েট করে পাপ করলাম, তারপর **কিছুমিছু**কে x-এর সাপেক্ষে ডিফারেনশিয়েট করে প্রায়শ্চিত্ত করলাম। পাপ, প্রায়শ্চিত্ত কাটাকাটি—মাঝ দিয়ে অঙ্ক শেষ!

এবারে এটা বোঝো নাকি দেখো তো: $y = \left(\sin e^{x^3}\right)^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(\sin e^{x^3}\right)^3 \cdot \frac{dy}{dx}\left(\sin e^{x^3}\right)$$
$$= 4\left(\sin e^{x^3}\right)^3 \cdot \cos e^{x^3} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\right)$$
$$= 4\left(\sin e^{x^3}\right)^3 \cdot \cos e^{x^3} \cdot e^{x^3} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$
$$= 4\left(\sin e^{x^3}\right)^3 \cdot \cos e^{x^3} \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2$$

ডিফারেন্সিয়েশনের অনেক বড় হাতিয়ার তোমার জন্য শেষ। এবার অনেক অনুশীলনী করতে হবে!

অনুশীলনী

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
2. $g(x) = \ln(x^2+x)$
3. $y = (x^3-1)^{100}$
4. $g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$
5. $y = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)$
6. $y = e^{\sin x}$
7. $g(t) = \frac{1}{(t^4+2)^3}$
8. $y = \cos(b^3 + x^3)$
9. $f(x) = (1+x^4)^{\frac{2}{3}}$
10. $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$
11. $y = xe^{-kx}$
12. $y = (4x - x^2)^{100}$
13. $y = a^3 + \cos^3 x$
14. $y = 3\cot(n\theta)$
15. $y = (x^2+1)^3\sqrt{x^2+2}$
16. $f(x) = \sqrt[4]{1+2x+x^3}$
17. $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
18. $y = 2^{3^{x^2}}$
19. $f(t) = \sin\left(e^{(\sin t)^2}\right)^2$
20. $y = xe^{cx}$
21. $g(x) = \frac{(x-1)^4}{(x^2+2x)^5}$
22. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
23. $y = e^{e^x}$
24. $y = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$
25. $y = 2^{\sin \pi x}$
26. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$
27. $y = \sin x + (\sin x)^2$
28. $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$
29. $y = \sin(\tan 2x)$
30. $y = 10^{1-x^2}$

৬.৫ ফাংশনের পাওয়ার ফাংশন (LOGARITHMIC DIFFERENTIATION)

উদাহরণ 6.11 $y = (\sin x)^{\cos x}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

এমন হলে আগের জানা কোনো নিয়মেই সরাসরি ডিফারেন্সিয়েট করা যাবে না। তবে ছোট্ট একটা কায়দা আছে। ln নেওয়া। $\ln a^b = b\ln a$,এই মহান সূত্রটা আমাদের সব সমান করে দেবে, পাওয়ারটার দম্ভচূর্ণ করে মাটিতে নামিয়ে আনবে। দেখা যাক!

$y = \sin x^{\cos x}$

বা, $\ln y = \ln \sin x^{\cos x}$

বা, $\ln y = \cos x \ln(\sin x)$

এখন এটাকে x-এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করব। চেইন রুল বা শিকল সূত্র আমাদের সহায়তা করবে।

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\cos x \ln(\sin x))$$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) + \ln(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \,.\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) + \ln(\sin x)\ (-\sin x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \,.\frac{1}{\sin x}\cos x - \sin x\,.\ln(\sin x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{(\cos x)^2}{\sin x} - \sin x\,.\ln(\sin x)\right\}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x}\left\{\frac{(\cos x)^2}{\sin x} - \sin x\,.\ln(\sin x)\right\}$

লগ দিয়ে আরেকটা মজার কাজ করা যায়। যখন অনেকগুলো ফাংশন গুণ আকারে থাকে। দেখো-

$$y = \frac{x^3 \cdot \sin x \cdot \ln x \cdot e^x}{(x^2+1) \cdot \tan x}$$

বা, $\ln y = \ln\left[\frac{x^3 \cdot \sin x \cdot \ln x \cdot e^x}{(x^2+1) \cdot \tan x}\right]$

বা, $\ln y = \ln(x^3) + \ln(\sin x) + \ln(\ln x) + \ln(e^x) - \ln(x^2+1) - \ln(\tan x)$

[যেহেতু, $\ln ab = \ln a + \ln b$ এবং $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$]

দেখো, এরা সবাই সমান হয়ে এক সমতলে এসে গেছে। চলো x-এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করি। বারবার দেখবে শিকল সূত্র- পাপ আর প্রায়শ্চিত্ত।

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}.\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{1}{\sin x}.\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{1}{\ln x}.\frac{d}{dx}(\ln x) + \frac{1}{e^x}.\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{1}{x^2+1}.\frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{1}{\tan x}.\frac{d}{dx}(\tan x)$$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{3x^2}{x^3} + \cot x + \frac{1}{x\ln x} + 1 - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{(\sec x)^2}{\tan x}\right\}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 \cdot \sin x \cdot \ln x \cdot e^x}{(x^2+1) \cdot \tan x}\left\{\frac{3x^2}{x^3} + \cot x + \frac{1}{x\ln x} + 1 - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{(\sec x)^2}{\tan x}\right\}$

{এই অঙ্কটা গুণের সূত্র এবং ভাগের সূত্র দিয়েও করা যাবে। সে ক্ষেত্রে টেস্ট ক্রিকেট দেখতে দেখতে অঙ্ক কষতে হবে। টসের সময় শুরু করবে, পুরস্কার বিতরণীর সময় শেষ হবে!}

৬.৬ বিপরীত ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশন:

একটা ফাংশনের যদি বিপরীত বা ইনভার্স ফাংশন থাকে, তাহলে সেই বিপরীত ফাংশনটার অন্তরীকরণ করা খুব সহজ। মূল ফাংশনটার অন্তরজ যা হবে, সেটাকে উল্টে দিলেই ইনভার্স ফাংশনের অন্তরজ পাওয়া যাবে।

ধরো, f ফাংশনটাকে আমরা লিখলাম, $y = f(x)$

এটার মানে হলো x ইনপুট দিলে y আউটপুট পাওয়া যায়। f-এর ইনভার্স ফাংশন f^{-1}-এর জন্য ব্যাপারটা হয় উল্টো। ওটাকে লেখা যায়, $x = f^{-1}(y)$

আমরা দেখাতে চাই, $\frac{d}{dy}\{f^{-1}(y)\} = \frac{1}{\frac{d}{dx}\{f(x)\}}$

বা, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

এটা দেখানো সহজ। মূল নিয়মে,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

আরেকটা উপায়ে দেখানো যায়, $y = f(x)$। y এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dy}(y) = \frac{d}{dy}(f(x))$

বা, $1 = f'(x)\frac{dx}{dy}$ [চেইন রুল]

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$

অনেক প্রমাণ হলো। এবার এটা ব্যবহার করে কয়েকটা কাজের জিনিস প্রমাণ করি চলো।

উদাহরণ 6.12 দেখাও যে, $y = \tan^{-1} x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$y = \tan^{-1} x$
$\therefore x = \tan y$

y-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\tan y) = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

সুতরাং $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{1+x^2}$

(প্রমাণিত) ■

উদাহরণ 6.13 দেখাও যে, $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ধরি, $y = \sin^{-1} x, \therefore x = \sin y$

y-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (প্রমাণিত) ■

অঙ্কগুলোর প্যাটার্ন লক্ষ করো, একইরকম। এভাবেই আরও বেশ কয়েকটা অঙ্ক আমরা করব।

উদাহরণ 6.14 দেখাও যে, $\frac{d}{dx}(\cos^{1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ধরি, $y = \cos^{-1} x, \therefore x = \cos y$

y-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$\frac{dx}{dy} = -siny = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}$

সুতরাং $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (প্রমাণিত) ■

হুঁশিয়ার: এটা কিন্তু x-এর সব মানের জন্য সত্য নয়। এর ডোমেন হতে পারে -1 থেকে +1 পর্যন্ত। এখানে, আবার ঠিক -1 কিংবা ঠিক +1 হলে হর শূন্য হয়ে অসংজ্ঞায়িত হয়ে যাবে। তাই, -1<x<1

আরেকটা ব্যাপার লক্ষ করো-

পূরক কোণের চিন্তা থেকে বলা যায়,

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

বা, $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0 - \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

এ কথাটা $\tan^{-1} x, \cot^{-1} x$-এর জন্যও সত্য। $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$। তাই $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ ।

একই কথা $\sec^{-1} x, \mathrm{cosec}^{-1} x$ জোড়ার জন্যও সত্য। ফলে, $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1} x)$ ।

এর আগে $\sin^{-1} x$ আর $\tan^{-1} x$-এর অন্তরজ বের করেছি। এখন চলো, $\sec^{-1} x$-এর অন্তরজ বের করি। তাহলে ছয়টা বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরজই আমাদের জানা হয়ে যাবে।

উদাহরণ 6.15 $\frac{d}{dx}(\sec^{1} x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

ধরি, $y = \sec^{-1} x, \therefore x = \sec y$

y-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$\frac{dx}{dy} = \sec y . \tan y = \sec y . \sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

সুতরাং $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (প্রমাণিত) ■

একইভাবে দেখানো যায়, $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

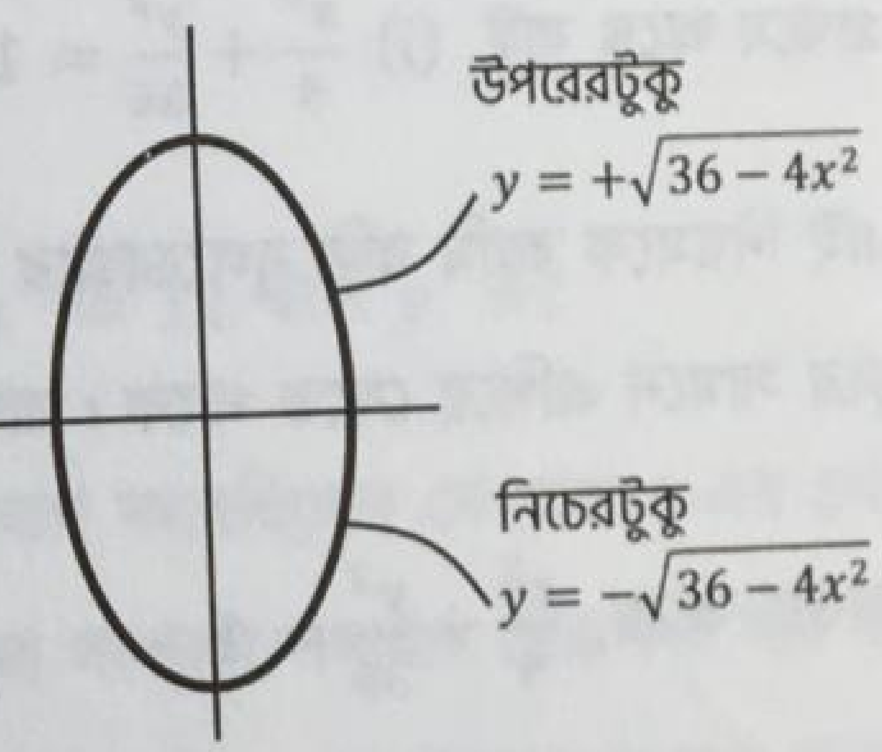
তোমাদের কাজ: $y = \cot^{-1} x$ হলে প্রমাণ করো যে, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$.

৬.৭ অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ:

আমরা দেখেছি $y = f(x)$ আকারে কোনো ফাংশন থাকলে কী করে অন্তরীকরণ করতে হয়। কিন্তু মাঝে মাঝে এমন সব ফাংশন থাকে যেখানে x আর y মিলেমিশে থাকে। y-কে আলাদা করা যায় না। আর আলাদা করা গেলেও x-এর ঠিক একটা ফাংশন পাওয়া যায় না। এ ধরনের সমীকরণকে বলে অব্যক্ত ফাংশন (Implicit Function)।

উদাহরণ 6.16 (i) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

এটি একটি উপবৃত্ত। এখানে y -কে যদিও আলাদা করা যায়, ঠিক 'একটা' ফাংশন পাওয়া যায় না।



$\frac{y^2}{36} = 1 - \frac{x^2}{9}$

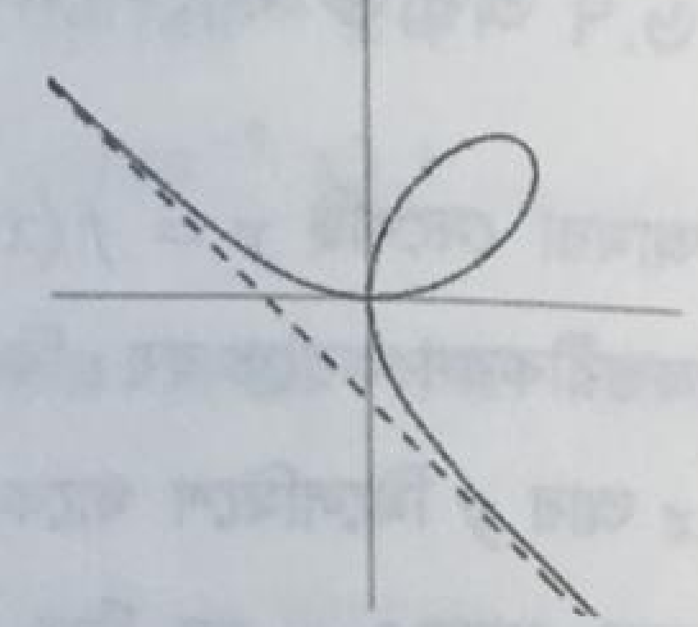
বা, $y^2 = 36 - 4x^2$

$\therefore y = +\sqrt{36 - 4x^2}$ অথবা $y = -\sqrt{36 - 4x^2}$

ঠিক 'একটা' ফাংশন পাওয়া গেল না, গেল দুইটা। এখন $\frac{dy}{dx}$ বের করতে চাইলে কোনটাকে অন্তরীকরণ করব? নির্দিষ্ট বিন্দু জানা থাকলে ঠিক সমীকরণ ব্যবহার করে নেওয়া যায়। কিন্তু সাধারণভাবে কোনো $\frac{dy}{dx}$ বলা যায় না।

এটিও তাই অব্যক্ত সমীকরণ।

(ii) এবার তাকাও এই মনোহর ছবির দিকে যার নাম দেকার্তের পাতা (Folium of Decartes)। এটার সমীকরণ হলো, $x^3 + y^3 = 6xy$ ।



আগেরবার খুব সহজে y আলাদা করা গিয়েছিল। এবার আলাদা করা বেশ কষ্টের কাজ। কিন্তু একটা দারুণ কৌশল জানা থাকলে y আলাদা না করেও এই সমস্যাগুলোর সহজ সমাধান হয়ে যায়।

প্রথমে অঙ্কে যাই, (i) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$, $\frac{dy}{dx} = ?$

এই নিয়মকে আমি বলি বুলডোজার পদ্ধতি। সব ভেঙে (ডিফারেনশিয়েট) চুরে সামনে এগিয়ে যেতে থাকে। তারপর $\frac{dy}{dx}$ আলাদা করে নেবে।

দেওয়া আছে, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{2x}{9} + \frac{2y}{36}.\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$

ডান দিকে y থাকল যে! থাকুক, অসুবিধে নাই।

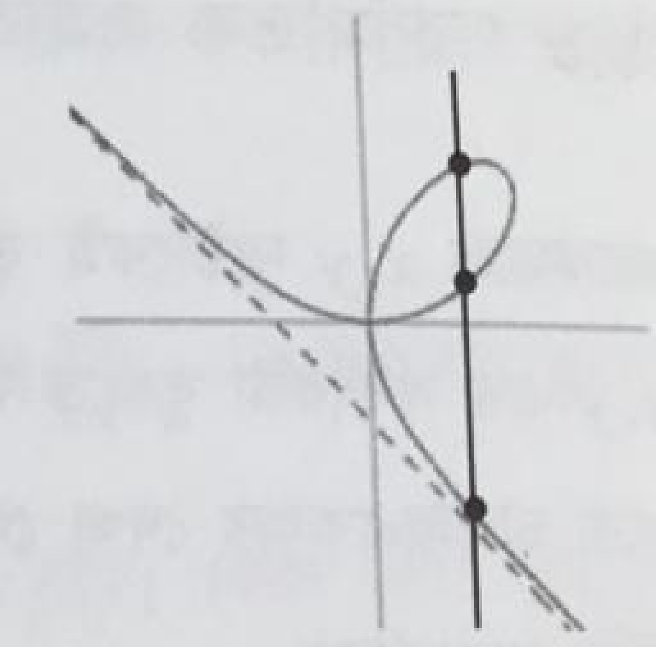
(ii) $x^3 + y^3 = 6xy$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y\frac{d}{dx}(x)$$

বা, $3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$



এটাই উত্তর!

কিন্তু মনে খচখচ করছে কেন ডানদিকে y। আসলে কি জানো, এটা থাকাটা জরুরি। উপরে দেখো, এখানে একই x-এর জন্য অনেকগুলো y রয়েছে। তাই কোন বিন্দুতে ঢাল নিতে চাও সেটা জানার জন্য x, y দুইটাই জরুরি।

উদাহরণ 6.17 $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$ হলে $y' = ?$

গণিতবিদ আবেল এবং গ্যালোয়া প্রমাণ করেছিলেন যে ঘাত 4-এর বেশি হলে বহুপদী সমীকরণের আর কোনো সাধারণ সমাধান বের করা যায় না। তার মানে এই সমীকরণ থেকে তুমি কখনোই y-কে আলাদা করতে পারবে না, যতই চেষ্টা করো। আলাদা বলতে বোঝাচ্ছি বামপক্ষে শুধু y আর ডানদিকে x-এর ফাংশন। এমন ক্ষেত্রে অব্যক্ত পদ্ধতিতে ডিফারেন্সিয়েশনই আমাদের ভরসা।

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$5y^4.\frac{dy}{dx} + 3x^2.\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(3x^2) + 20x^3 = 0$$

বা, $(5y^4 + 6x^2y)\frac{dy}{dx} = -6xy^2 - 20x^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-6xy^2 - 20x^3}{5y^4 + 6x^2y}$$

৬.৮ পরামিতিক সমীকরণের অন্তরীকরণ:

মাঝেমধ্যে x, y দুটোকেই তৃতীয় আরেকটা চলক দিয়ে প্রকাশ করলে x, y-এর সম্পর্কটা বুঝতে বা বিশ্লেষণ করতে বেশি সুবিধা হয়। যেমন ধরো ঢাকায়একবার দেখা গেল পানির বোতলের বিক্রি ও আইসক্রিমের বিক্রি সম্পর্কযুক্ত-

পানির বোতলের সংখ্যা, x	10000	20000	30000	40000
আইসক্রিমের সংখ্যা, y	201	401	601	801

আইস্ক্রিমের বিক্রি বাড়লে পানির বোতলের বিক্রি বেড়ে যায়। তাহলে কি পানির বোতল আইস্ক্রিমের ওপর নির্ভরশীলত্ব ব্যাপারটা কেমন হয়ে গেল না?

আসলে চিন্তা করো, এই দুটিই আরেকটা ব্যাপারের ওপর নির্ভরশীল, সেটা হলো তাপমাত্রা। গরম বেশি পড়লে মানুষ বেশি পানি খায়, বেশি আইস্ক্রিম খায়।

তারমানে x ও y আসলে t-এর ফাংশন!

$x = f(t)$
$y = g(t)$

এই উদাহরণে $t = 1, 2, 3$ হলে,

$x = 10000\,t$
$y = 200\,t + 1$ লেখা যায়।

এখানে তৃতীয় চলককে বলে পরামিতি বা Parameter। এদের সাধারণত t বা θ দিয়ে লেখা হয়।

যদি $x = f(t)$ আর $y = g(t)$ হয়, তখন $\frac{dy}{dx}$ -এর মান কত হবে?

যদি ফাংশনটা এক এক হয় তাহলে $x = f(t)$ থেকে লেখা যায়, $t = f^{-1}(x)$, অর্থাৎ, t-কে x-এর একটা ফাংশন হিসেবে ভাবা যায়।

আমরা বলতে পারি, $y = g(f^{-1}(x))$

এবার শৃঙ্খল বিধি (chain rule) মনে করে দেখো। মনে করে দেখো, আমরা z ধরে নিয়েছিলাম, যেটা ছিল x-এর ফাংশন। আর y ছিল z-এর ফাংশন। তখন আমরা পেয়েছিলাম—

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$$

এখানেও কিন্তু t হলো x-এর ফাংশন আর y হলো t-এর ফাংশন ধরে নিচ্ছি। ফলে লিখতে পারি,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরীকরণ সূত্র থেকে আমরা পেয়েছিলাম, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

তাহলে বলা যায়,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

তার মানে y এবং x-কে t-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে ভাগ করে দিলেই চলবে।

তাহলে একটা উদাহরণ দেখা যাক,

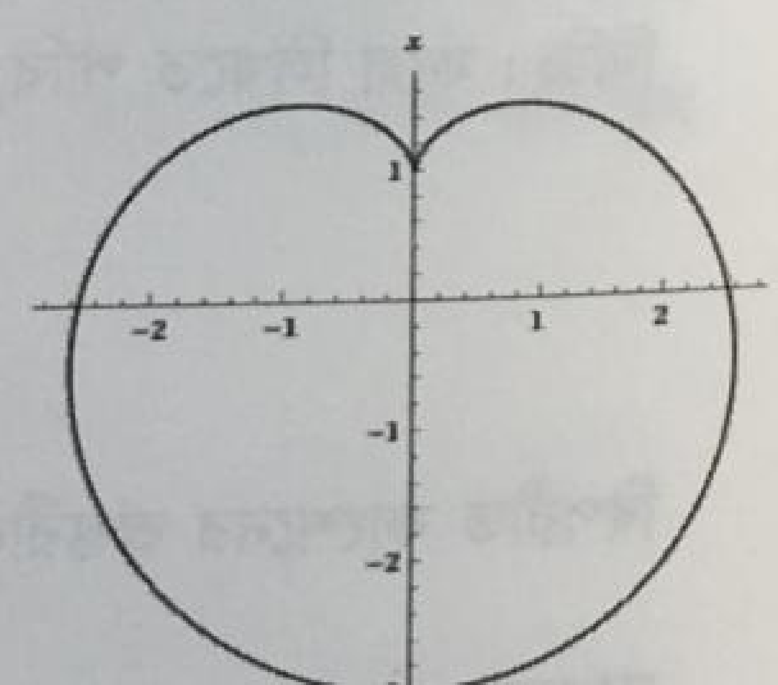
উদাহরণ 6.18 $y(t) = 2\cos t - \cos 2t$, $x(t) = 2\sin t - \sin 2t$ হলে, $dy/dx = ?$

সমাধান :

$y(t) = 2\cos t - \cos 2t$	$x(t) = 2\sin t - \sin 2t$
$\therefore \frac{dy}{dt} = -2\sin t + \sin 2t \frac{d}{dt}(2t)$	$\therefore \frac{dx}{dt} = 2\cos t - 2\cos 2t$
$= -2sint + 2sin2t$	

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin t + 2\sin 2t}{2\cos t - 2\cos 2t}$$

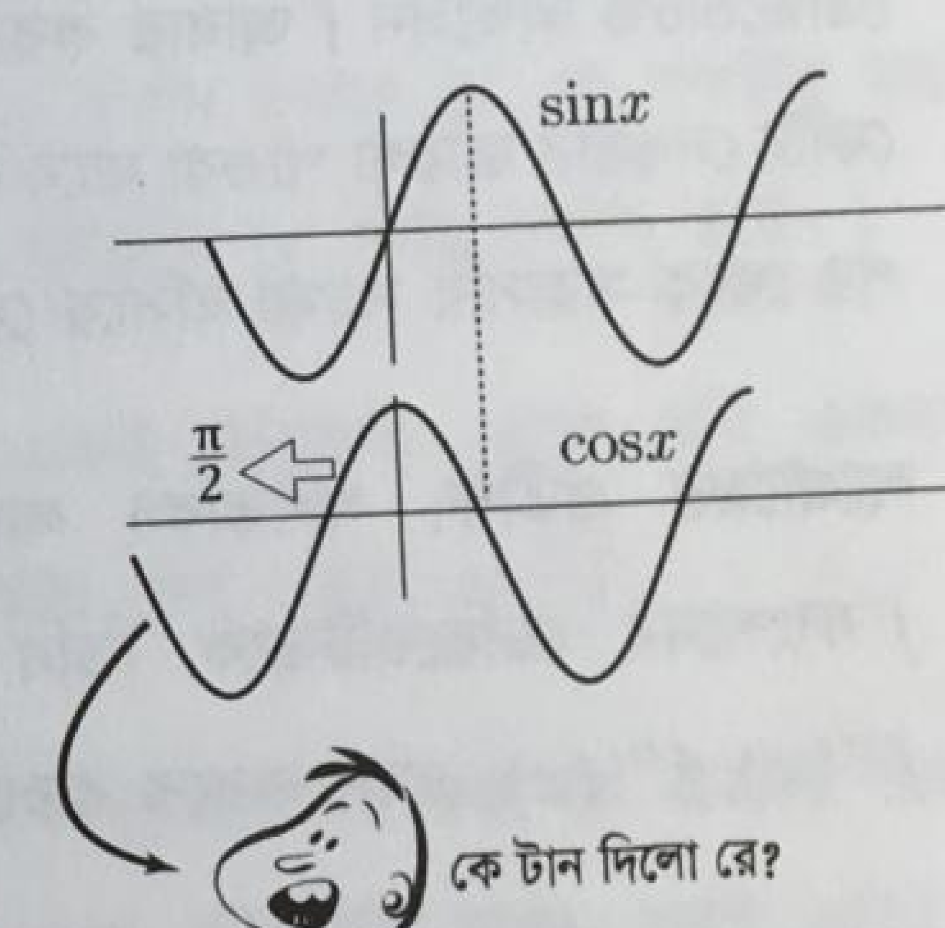
এখানে একটা ব্যাপার বলতে পারি। ওপরে t-এর বিভিন্ন মানের জন্য x-এর অনেকগুলো মান পাওয়া যাবে। t-এর ওই মানের জন্য y-এর অনেকগুলা মান পাওয়া যাবে। এই x ও y-গুলোকে জোড়া পাওয়া যাবে। এই x ও y -গুলোকে জোড়া জোড়া বানিয়ে যত কিছু পাওয়া যাবে এদের বসিয়ে ছবি আঁকলে পাওয়া যাবে পাশের ছবিটার মতো। এই আকৃতির নাম Cardiode (অন্তরিকা)।



পরামিতিক সমীকরণ দিয়ে এত অপূর্ব শৈল্পিক লেখচিত্র আঁকা যায়, যেগুলোর দিকে মুগ্ধ হয়ে তাকিয়ে থাকা যায়। আগ্রহীরা চাইলে ডানের QR code টা তোমাদের স্মার্টফোন দিয়ে স্ক্যান করে দেখতে পারো। দারুণ সব পরামিতিক সমীকরণের সাথে খেলা করতে পারবে!

৬.৯ পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ (SUCCESSIVE DIFFERENTIATION):

ধরা যাক আমাদের কাছে একটা ফাংশন আছে যার নাম f। এটাকে x -এর সাপেক্ষেএকবার ডিফারেন্সিয়েশন করলে যা পাওয়া যায় তাকে আমরা এভাবে লিখতে পারি $\frac{df}{dx}$। এটাকে যদি আরেকবার ডিফারেন্সিয়েশন করা যায় তখন কী পাওয়া যাবে?



এটা বলার আগে চলো নোটেশনের গল্প বলি। এই যে আমরা যখন লিখি $\frac{df}{dx}$, এটা আসলে লিবনিজের অবদান। ক্যালকুলাসে অনেক রকম নোটেশন রয়েছে। তার ভেতরে চার রকমের নোটেশন বেশি প্রচলিত।

লিবনিজের প্রতীক: f ফাংশনকে x –এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করলে যা পাওয়া যাবে সেটাকে লিবনিজ লিখেছিলেন $\frac{df}{dx}$। একে যদি আবার এর

সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করা হয় তাকে তিনি এভাবে ভাবলেন $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$। এটাকে তিনি এভাবে লিখলেন: $\frac{d^2f}{dx^2}$.

খেয়াল করো, এটা কিন্তু d-এর বর্গ বা square না। নিচে x-এর বর্গ না। উনি এভাবে শর্টকাটে লিখেছিলেন তাই আমরাও লিখি।

এরপরে যদি আবার ডিফারেন্সিয়েট করা যায় পাব $\frac{d^3f}{dx^3}, \frac{d^4f}{dx^4} \cdots$

এমন করে nতম ডেরিভেটিভ হবে $\frac{d^nf}{dx^n}$.

নিউটনের প্রতীক: নিউটন লিখেছিলেন মাথায় ফোঁটা দিয়ে। fফাংশনের ডেরিভেটিভ লিখলেন $\dot{f}$ আবার করলে $\ddot{f}$. বুঝতেই পারছ একটু পরেই আর ফোঁটা দেওয়ার জায়গা পাওয়া যাবে না। অতএব উনি বুদ্ধি করলেন তিনটার পর থেকে সরাসরি সংখ্যা বসিয়ে দেবেন।

ল্যাগ্রাঞ্জের প্রতীক: গণিতবিদ ল্যাগ্রাঞ্জের প্রতীক সবচেয়ে জনপ্রিয়। f ফাংশনের ডেরিভেটিভকে তিনি লিখলেন এভাবে→ $f'(x)$. এরপর $f''(x), f'''(x)$, এমন করতে করতে $f^n(x)$.

অয়লারের প্রতীক: এই প্রতীকটাও দেখে রাখো। পরে আমার বই পড়ে ক্যালকুলাস শেখার পর যদি অন্য কোথাও গিয়ে এমন চেহারা দেখো, বিভ্রান্ত হয়ে আমাকে গালি দেবে না। অয়লার $\frac{dy}{dx}$ কে লিখলেন D^2y, এভাবে বড় হাতের 'D' অক্ষর দিয়ে।

ক্যালকুলাসে Dy মানে D-এর সঙ্গে y গুণ না কিন্তু! এর মানে $\frac{dy}{dx}$, এভাবে $D^2y, D^3y, \ldots D^ny$।

এই নোটেশনটা বেশি কাজে লাগে Partial Derivative বা আংশিক ব্যবকলন করার ক্ষেত্রে। x-এর সাপেক্ষে y-এর Partial derivative নিলে সেটাকে লেখা হয় এভাবে D_xy। সেই ব্যাপারটা খুব কঠিন কিছু নয়, তবে এই খণ্ডে বিষয়টা অন্তর্ভুক্ত করছি না। দ্বিতীয় খণ্ডেএটা সম্পর্কে ধারণা দেওয়া হবে।

কিন্তু এতবার অন্তরজ বা ডেরিভেটিভ নেওয়ার মানে কী?

আসলে আমাদের চেনা-জানা বস্তুগুলোর হিসাব করতে বেশিবার ডেরিভেটিভ নিতে হয় না। সবচেয়ে সহজ উদাহরণ বলতে পারো দূরত্বকে, ধরো tসময়ে একটা গাড়ি কতদূর গেল সেটাকে s দিয়ে প্রকাশ করা হলো। [জার্মান শব্দ 'strecke'-এর প্রথম অক্ষর 's', যে শব্দটার মানে হলো দূরত্ব। এজন্য দেখবে, প্রায়ই দূরত্বকে 's' দিয়ে প্রকাশ করে।]

যাহোক তাহলে s হলো t-এর একটা ফাংশন। একে যদি একবার ডিফারেন্সিয়েট করা হয়, সেটা বোঝায় বেগ। $v(t) = \frac{ds}{dt}$।

যদি আবার v-কে t-এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করা হয় তাহলে পাওয়া যায় ত্বরণ, যেটা বোঝায় বেগ কী হারে পরিবর্তিত হচ্ছে। ত্বরণ, $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$।

আচ্ছা যদি ত্বরণকে আবার ডিফারেন্সিয়েট করা হয়? যা পাওয়া যায় সেটাকে বলে 'ঝাঁকি' (Jerk)। বাসে যখন হুট করে ঝাঁকি খাও, বুঝে নেবে সেটা হলো ত্বরণের পরিবর্তন। তাহলে, ঝাঁকি $= \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{d^3s}{dt^3}$। এরপরেরটাকে বলে jounce। না বাপু, এর বেশি অন্তরজের উদাহরণ চেনাজানা জগতে খুঁজে পাওয়া কষ্টকর!

৬.১০ ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন তৈরির ধারণা:

সরল দোলক নিয়ে ভাবতে গিয়ে পদার্থবিজ্ঞানীরা দেখলেন ত্বরণের মান সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী। তখন তারা এমন একটা সম্পর্কের কথা বললেন—

$$\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ [যেখানে k হলো সমানুপাতিক ধ্রুবক]

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

এই যে এই জাতীয় সমীকরণ যেখানে মূল ফাংশন আর তার ডেরিভেটিভগুলো উপস্থিত থাকে, তাদের বলে অন্তরক সমীকরণ (Differential equation)। এটা প্রচণ্ড শক্তিশালী একটা ব্যাপার। পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন, অর্থনীতির বহুগুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক তত্ত্ব প্রকাশ করা হয় এমন Differential equation থেকে।

এমন Differential equation থাকলে সেটা কীভাবে সমাধান করতে হবে সেটা নিয়ে গণিতের একটা বড় শাখাই রয়েছে।

আমরা চাইলে সমাধান থেকেও ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন তৈরি করতে পারি।

উদাহরণ 6.19 $y = 2\sin x$ হলে, প্রমাণ করো যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

দেওয়া আছে, $y = 2\sin x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cos x$ [x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2\sin x$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (প্রমাণিত) ■

৬.১১ n-তম অন্তরজ নির্ণয় ($n-th$ DERIVATIVE):

অনেকসময় দেখা যায় বারবার অন্তরীকরণ করতে থাকলে একটা সুনির্দিষ্ট প্যাটার্ন পাওয়া যায়। তখন সেখান থেকে সাধারণীকরণ করে আমরা n-তম অন্তরজকে একবারে বের করে ফেলতে পারি। তাহলে লাভ কী? লাভ হলো যদি পঁচিশতম অন্তরজ বের করতে হয়, আগের চব্বিশবার আর ডিফারেন্সিয়েট করতে হবে না।

চলো একটা উদাহরণ দেখা যাক—

উদাহরণ 6.20 $f(x) = \sin x$ হলে, $f^n(x) = ?$

$f(x) = \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x$

এই $\cos x$ -কে আসলে লেখা যায় $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$। লেখচিত্রে তাকালে ব্যাপারটা অনুভব করা যায়। $\sin x$ -কে বা $\cos x$-কে ডিফারেন্সিয়েট করলে লেখচিত্রটা বামদিকে $\frac{\pi}{2}$ ঘর সরে আসে। তাই—

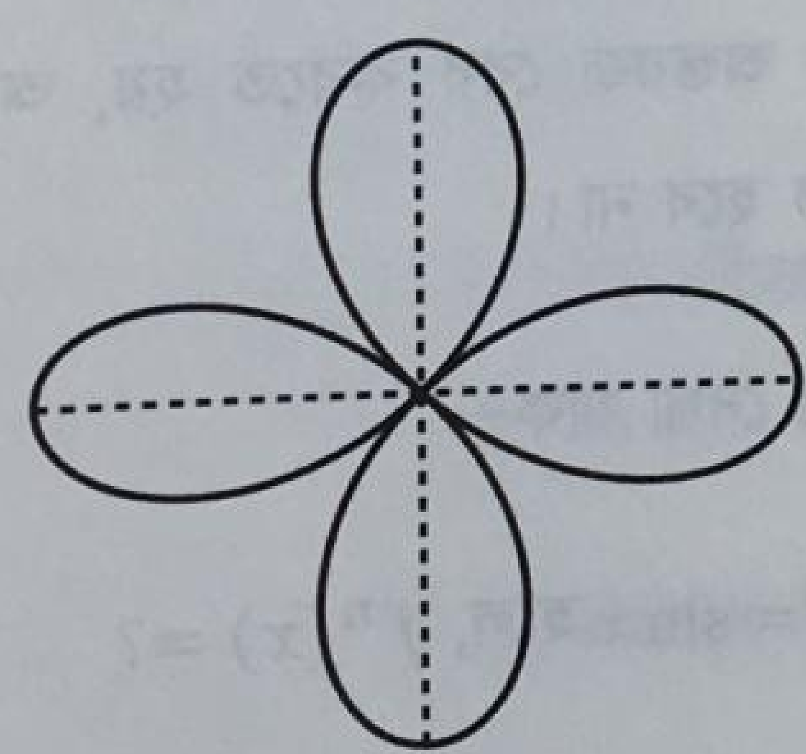
$$f'(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

অর্থাৎ, প্রতিবার $\frac{\pi}{2}$ করে যোগ হতে থাকবে। এ থেকে ধারণা করা যায়,

$$f^n(x) = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

অধ্যায় শেষ করি আরেকটা সুন্দর পরামিতিক ছবি দিয়ে-



$$x = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos t$$

$$y = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin t$$

গোলাপ পাপড়ি (Rose petal) সমীকরণ

অধ্যায়

৭

অন্তরীকরণের ব্যবহার

৭.১ স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ:

অন্তরীকরণের মূল নিয়ম শেখানোর সময় আমি বলেছিলাম, আমরা অন্তরজ থেকে যেটা পাই, সেটা হলো লেখচিত্রের ওপর যেকোনো বিন্দুতে ঢাল বের করার একটা ফাংশন। এই ধারণা ব্যবহার করে আমরা এখন কিছু অঙ্ক করব।

উদাহরণ 7.1 $y = x^2$ পরাবৃত্তের $(1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?

প্রদত্ত সমীকরণ: $y = x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x$ [x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে।]

তাহলে, $(1,1)$ বিন্দুতে ঢাল $= 2\cdot 1 = 2$

খেয়াল করো, যে বিন্দুতে ঢাল বের করতে বলেছে, সেটার ভুজের মান x-এর জায়গায় বসিয়ে দিয়েছি। $\frac{dy}{dx}$ এর ভেতরে y থাকলে কোটির মানও বসিয়ে দিতাম।

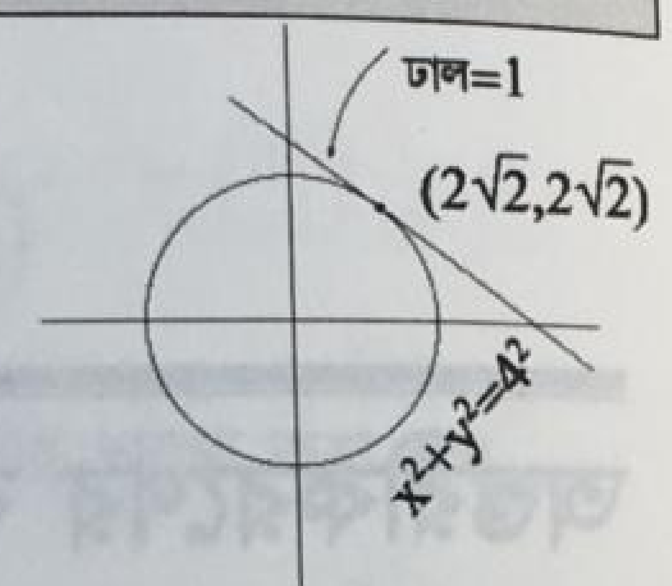
উদাহরণ 7.2 $x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের ওপর $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে ঢাল কত?

অব্যক্ত ফাংশনের কথা স্মরণ করো।

দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 = 4^2$

$$\therefore \quad 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

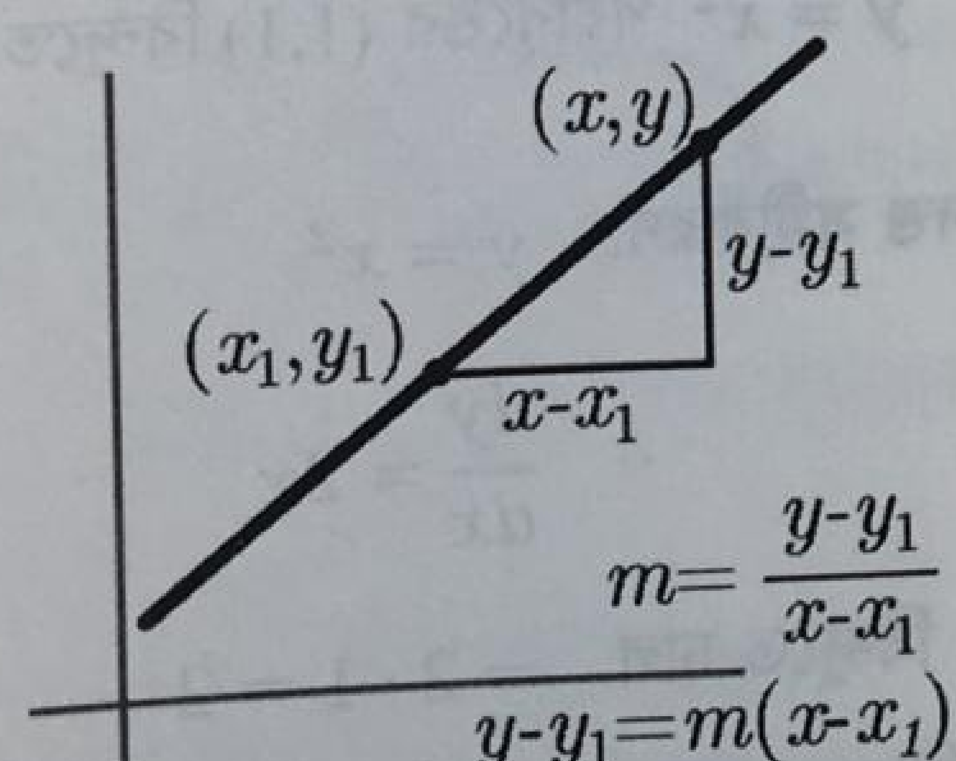
বা, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$



সুতরাং, $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে ঢাল $= -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -1$।

উদাহরণ 7.3 $x^3 + y^3 = 6xy$ বক্ররেখার ওপর (3,3) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ বের করো।

অঙ্ক করার আগে একটু ভাবি। প্রথমে আমরা অবশ্যই (3, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল বের করব। তারপর সরলরেখার একটা সমীকরণ ব্যবহার করব। চলো সেটা একটু ঝালাই করে নিই ।



মনে করো, একটা সরলরেখার ওপর আগে থেকে একটা বিন্দু জানা আছে, সেটা হলো (x_1, y_1)। রেখাটার ঢাল m। তাহলে সরলরেখাটার সমীকরণ কী ... সমীকরণ নির্ণয় করতে হয় সঞ্চারপথের ধারণা থেকে। ধরা যায়

রেখাটার ওপর একটা চলমান বিন্দু আছে (x, y)। এটা এমন বিন্দু যা রেখাটার সবগুলোর বিন্দুতে প্রতিনিধিত্ব করে। তাহলে, (x, y) ও (x_1, y_1) থেকে পাব,

ঢাল, $m = \frac{y - x_1}{x - x_1}$।

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$$

ঢাল এবং একটা বিন্দু জানা থাকলে এই স্পর্শকটা ব্যবহার করেই আমরা সরলরেখার সমীকরণ পেয়ে যাই।

দেওয়া আছে, $x^3 + y^3 = 6xy$

$$\therefore 3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y$$

বা, $(3y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

(3,3) বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \dfrac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$

তাহলে (3,3) বিন্দুগামী ও -1 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ হবে—

$(y - 3) = (-1)(x - 3)$

বা, $y - 3 = -x + 3$

বা, $x + y - 6 = 0$

উদাহরণ 7.4 $y = x^3 - x^2 + 1$ বক্ররেখার $(2,5)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কত?

> খেয়াল করো, কোনো বিন্দুতে অভিলম্ব বলতে বোঝায় ওই বিন্দুতে স্পর্শকরেখার ওপর লম্ব সরলরেখাকে। আমরা জানি দুটো সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে তাদের ঢালের গুণফল হবে -1। তাহলে স্পর্শকের ঢাল যদি হয় 6, লম্বের ঢাল হবে $-\frac{1}{6}$। এটাই আমরা ব্যবহার করব এখানে।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $y = x^3 - x^2 + 1$

অন্তরীকরণ করে, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$

$(2,5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= 3\cdot2^2 - 2\cdot2$

$= 12 - 4 = 8$

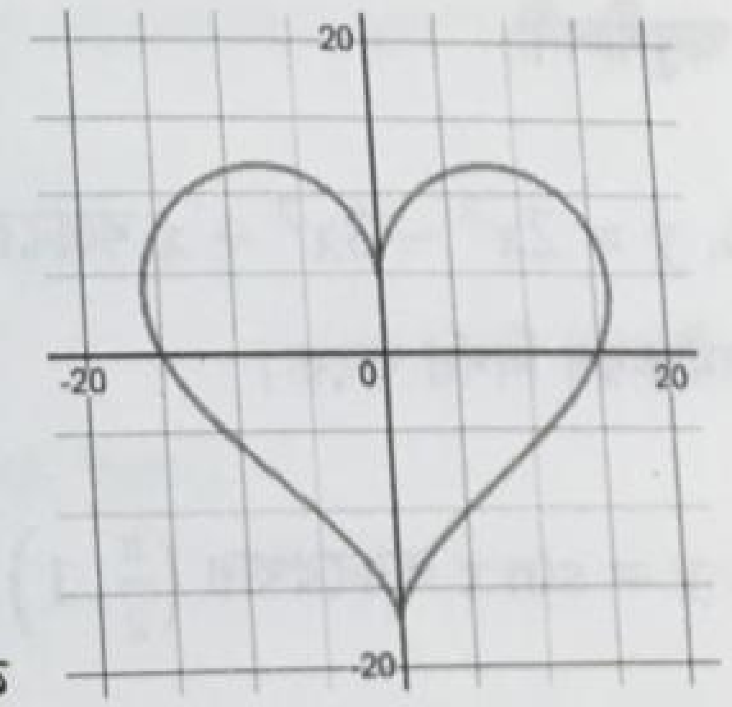
$\therefore$ $(2,5)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{8}$

তাহলে $(2,5)$ বিন্দুগামী $-\frac{1}{8}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ:

$$(y-5) = \left(-\frac{1}{8}\right)(x-2)$$

বা, $8y - 40 = -x + 2$

বা, $x + 8y - 42 = 0$



উদাহরণ 7.5 এই হৃদয় আকৃতির অনিন্দ্য সুন্দর লেখচিত্রে $t = 1.86$ এর জন্য স্পর্শরেখার সমীকরণ কী বের করো।

এই লেখচিত্রটি নিচের পরামিতিক সমীকরণ দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

$x = 16\sin^3 t$

$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$

সমাধান: প্রথমে দেখো, $t = 1.86$ বিন্দুতে $x = 14.09, y = -1.45$ ।

এবার স্পর্শকরেখার ঢাল বের করি (পরামিতিক সমীকরণের নিয়ম ভাবো)।

$\frac{dx}{dt} = 48\sin^2 t\cos t$

$\frac{dy}{dt} = -13\sin t + 10\sin 2t + 6\sin 3t + 4\sin 4t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{48\sin^2 t\cos t}{-13\sin t + 10\sin 2t + 6\sin 3t + 4\sin 4t}$

তাহলে, $t = 1.86$ বিন্দুতে স্পর্শকরেখার ঢাল,

$\frac{dy}{dx}\Big|_{=3.77} = \frac{-12.5757}{-18.1448} = 0.693$

(14.09,-1.45) বিন্দুতে 0.693 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ:

$$y + 1.45 = 0.693(x - 14.09)$$

অনুশীলনী:

১. $y = 2x^3 - 3x^2 + x$ বক্ররেখার $(1,0)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

২. $y = \sin x$ বক্ররেখার $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

৭.২ অন্তরীকরণের ব্যবহার: পরিবর্তনের হার হিসেবে অন্তরীকরণ

অনন্ত জলিলের লাফ দেওয়ার গল্প থেকে আমরা দেখেছিলাম কী করে তাৎক্ষণিক বেগের জন্য অন্তরীকরণ ব্যবহার করা যায়। মূল ব্যাপারটা ছিল এমন: সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বকে $s(t)$ দিয়ে প্রকাশ করা হলে, তাৎক্ষণিক দ্রুতি, $v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$।

তার মানে দ্রুতিকে সময়ের সাপেক্ষে অতিক্রান্ত দূরত্বের পরিবর্তনের হার ভাবা যায়।

উদাহরণ 7.6 নিউটনের গতিসূত্র থেকে জানা যায়, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$। অন্তরীকরণ করে প্রমাণ করো, $v = u + at$.

আমরা জানি, $v = \frac{d}{dt}(s)$

$$= \frac{d}{dt}\left(ut + \frac{1}{2}at^2\right)$$

$$= u + \frac{1}{2}\cdot 2at = u + at$$

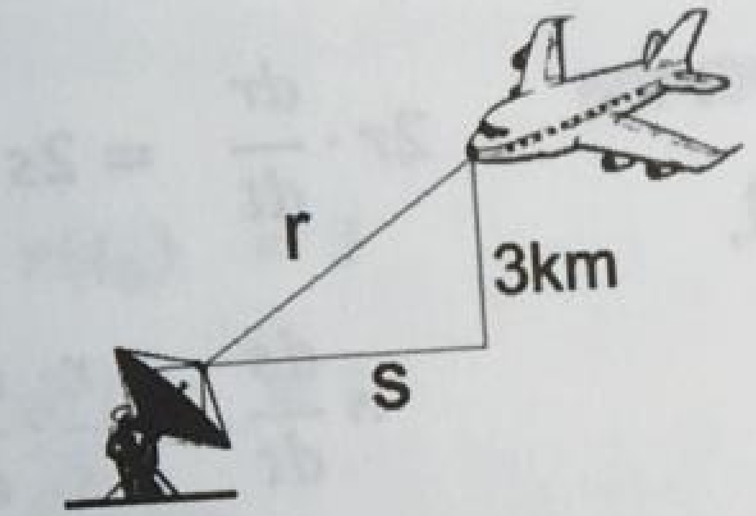
দেখো বেগকে যদি আবার অন্তরীকরণ করো, পরে থাকবে ত্বরণ।

$$\frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(u + at) = a$$

ঠিকই আছে, বেগের পরিবর্তনের হারই হলো ত্বরণ।

এবারে একটা কাজের অঙ্ক করা যাক!

উদাহরণ 7.7 চলো আমরা দেখি মাটিতে থাকা রাডার কী করে আকাশে থাকা প্লেনের গতি মাপতে পারে।



একটি উড়োজাহাজ মাটি থেকে 3 km উপর দিয়ে উড়ছে। রাডার প্রতিমুহূর্তে উড়োজাহাজ থেকে তার দূরত্ব r মাপছে। কোনো একসময় t_0 তে রাডারটি মেপে দেখল ওই সময় প্লেনটি 5 km দূরে আছে অর্থাৎ, $r(t_0) = 5$ এবং রাডারটি আরও দেখল ওই t_0-মুহূর্তে রাডার থেকে প্লেনটির দূরত্ব 320 km/hr হারে কমে যাচ্ছে। বলতে পারো, t_0-তে প্লেনটির গতিবেগ কত?

সমাধান: ধরি, t সময় পর প্লেনটির আনুভূমিক দূরত্ব $= s(t)$, তাহলে আমাদের বের করতে হবে $\frac{ds}{dt}$, যখন $t = t_0$।

খেয়াল করো, $t = t_0$ তে দেওয়া আছে $r(t_0) = 5$ এবং $\frac{dr}{dt} = -320$ km/hr।

এখানে (−) চিহ্ন, কারণ প্লেনটি রাডারের কাছে আসছে, সময়ের সাথে দূরত্ব কমে যাচ্ছে।

এখানে খেয়াল করো $\frac{dr}{dt}$ ও $\frac{ds}{dt}$ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত।

এমন ধরনের সমস্যাকে বলে 'Related Rate Problems' বা সম্পর্কযুক্ত হারের সমস্যা। চলো, প্রথমে স্পর্শকটা খুঁজে বের করি। পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে বলা যায়,

$$r^2 = s^2 + 3^2$$

উভয়পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2r \cdot \frac{dr}{dt} = 2s \cdot \frac{ds}{dt} + 0$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{r}{s} \cdot \frac{dr}{dt}$$

খেয়াল করো, এই সম্পর্কটি যেকোনো t এর জন্য সত্যি। এখন আমরা $t = t_0$ তে লক্ষ করি। ঐ মুহূর্তে r=5। তাহলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাব- $5^2 = s^2 + 3^2$। বা, $s = \sqrt{25-9} = 4$। এই মানটা উপরের হারের সম্পর্কের সমীকরণে বসিয়ে দিয়েই আমরা পেয়ে যাব $t = t_0$ তে $\frac{ds}{dt}$ এর মান।

$$\frac{ds}{dt} = \frac{r}{s} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{5}{4}(-320) = -400 \text{ km/hr}$$

উদাহরণ 7.8 'বর্ণমালা' সাবান দিয়ে গোলাকৃতির বুদবুদ বানিয়ে ফোলাচ্ছে। বর্ণমালার বেরসিক বাবা সেই বুদবুদের আয়তন বৃদ্ধির হার মাপতে চেষ্টা করছে। তিনি ঘটনাটা ভিডিও করলেন। তারপর ভিডিও থেকে ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার মাপলেন। দেখলেন, যখন ব্যাসার্ধ = 3 cm, তখন ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার 1 cm/s। ওই সময়ে আয়তন বৃদ্ধির হার কত এটা কী বলা সম্ভব?

সমাধান: ধরি, t সময় পর ব্যাসার্ধ $r(t)$ এবং আয়তন $V(t)$। কোনো নির্দিষ্ট সময় $t = t_0$ তে,

$$r(t_0) = 3$$

এবং $$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = 1$$

বের করতে হবে, $$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = ?$$

আমরা জানি, $$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot 3\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$\therefore t = t_0$ বিন্দুতে $$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = 4\pi r(t_0)^2 \cdot \frac{dr}{dt}_{t=t_0}$$

$$= 4\pi \cdot 3^2 \cdot 1$$

$$= 36\pi$$

আয়তন বৃদ্ধির হার $= 36\pi$ cm^3/sec। এককটা খেয়াল রেখো।

উদাহরণ 7.9 দেখাও যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল যদি সমহারে বাড়ে, তাহলে পরিসীমা বৃদ্ধির হার হয় ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক।

সমাধান: ধরি, সময়ে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r(t)$, পরিসীমা $P(t)$ এবং ক্ষেত্রফল $A(t)$। দেওয়া আছে, $\frac{dA}{dt} = k$ [যেখানে k ধ্রুবক। যেহেতু সমহারে বাড়ছে, ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার ধ্রুবক।]

প্রমাণ করতে হবে, $\frac{dP}{dt} \propto \frac{1}{r}$

আমরা জানি, $P = 2\pi r$ এবং $A = \pi r^2$

যেহেতু ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হারটা দেওয়া আছে, ওটা নিয়েই শুরু করা যাক

$$A = \pi r^2$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\text{বা, } k = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{k}{2\pi r}$$

এবারে লক্ষ্য করি পরিসীমার দিকে

$$\text{এখন, } P = 2\pi r$$

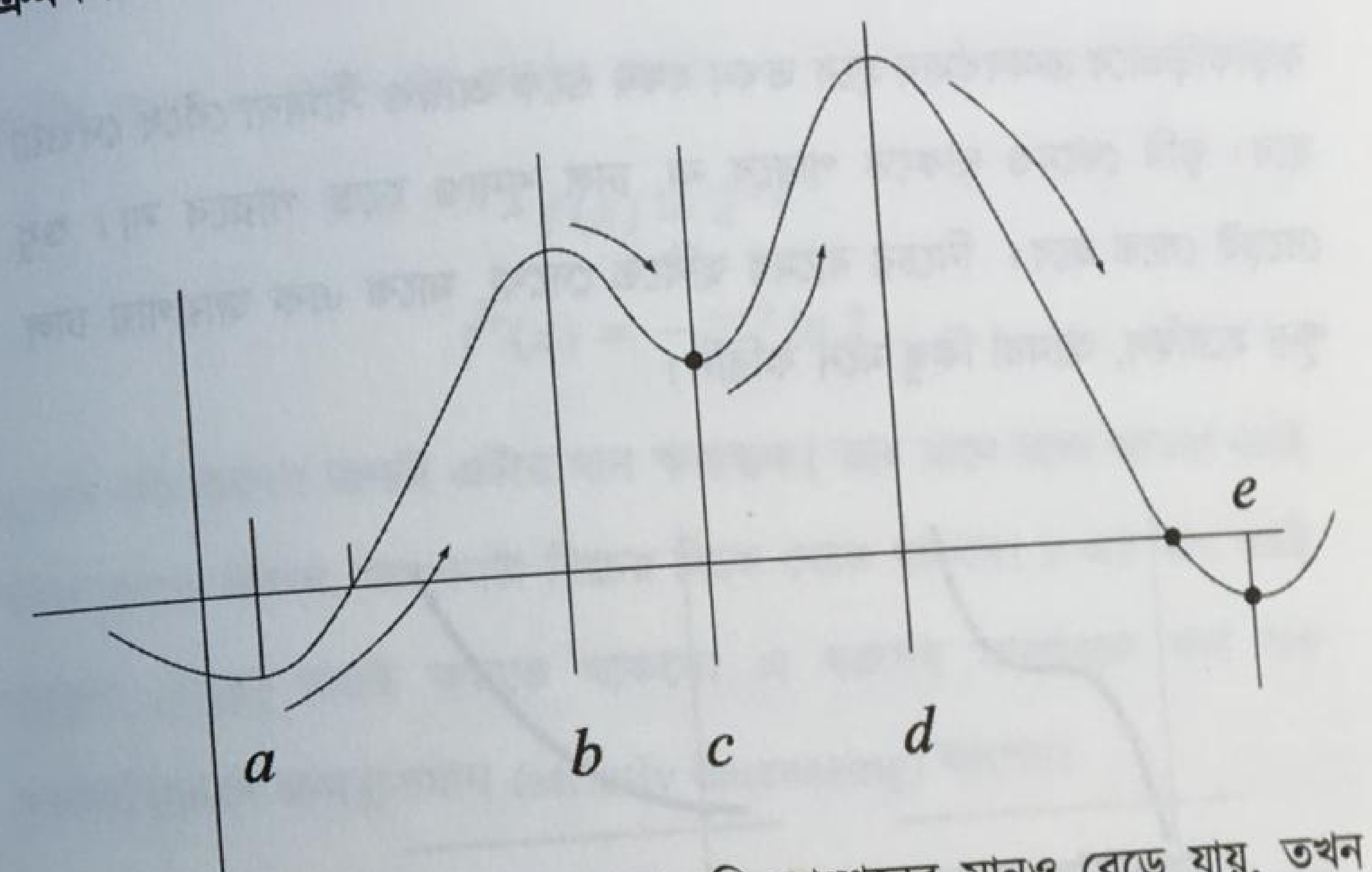
$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi dr}{dt} = 2\pi \cdot \frac{k}{2\pi r}$$

$$\text{বা, } \frac{dP}{dt} = k \cdot \frac{1}{r}$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} \propto \frac{1}{r}$$

৭.৩ অন্তরীকরণের ব্যবহার: লেখচিত্রের চেহারা সুরত:

ক্রমবর্ধমান ফাংশন (Increasing Function):



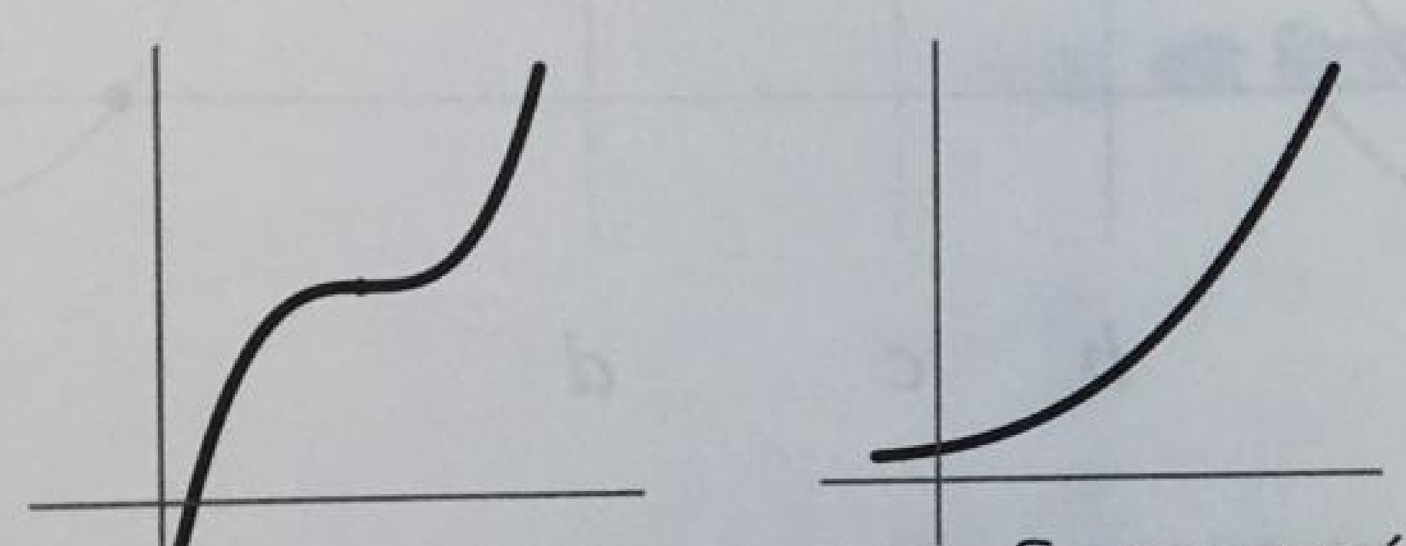
x এর মান বেড়ে যাওয়ার সাথে যদি ফাংশনের মানও বেড়ে যায়, তখন তাকে বলে ক্রমবর্ধমান ফাংশন। ছবিতে দেখো, (a, b) ব্যবধিতে এবং (c, d) ব্যবধিতে ফাংশনটির মান বাড়ছে x বাড়ার সাথে সাথে। এই ব্যবধিগুলোতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান এবং ঢালের চিন্তা থেকে তোমরা ধারণা করতে পারো, এই জায়গাগুলোতে ঢাল ধনাত্মক।

এই ব্যবধিগুলোতে $b \geq a$ হলে $f(b) \geq f(a)$ হয়।

ক্রমবর্ধমান ফাংশনগুলোর ক্ষেত্রে দুই ধরণের গাণিতিক ভাষা ব্যবহার করা হয়। একটাকে বলে ক্রমবর্ধমান, আরেকটাকে বলে কড়াকড়িভাবে ক্রমবর্ধমান (strictly increasing function)।

এমনিতে কোনো ফাংশনের মান যদি কখনও না কমে, সেটাকেই ক্রমবর্ধমান বলা যায়। অর্থাৎ মাঝে কিছুক্ষণ সমান থাকলেও অসুবিধা নাই। ঢাল শূন্য হলেও অসুবিধা নাই, তবে ঋণাত্মক হওয়া যাবে না।

কড়াকড়িভাবে ক্রমবর্ধমান হবে তখন যখন ওকে আরও সীমানা বেঁধে দেওয়া হবে। তুমি থেমেও থাকতে পারবে না, ঢাল শূন্যও হতে পারবে না। শুধু বেড়েই যেতে হবে। নিচের বামের ছবিতে দেখো, মাঝে এক জায়গায় ঢাল শূন্য হয়েছিল, আমরা কিছু মনে করিনি।



ক্রমবর্ধমান ফাংশন (ঢাল শূন্য অথবা ধনাত্মক)   কড়াকড়িভাবে ক্রমবর্ধমান ফাংশন (ঢাল শুধু ধনাত্মক হতে পারবে)

কিন্তু কড়াকড়ি ক্রমবর্ধমান হতে গেলে সেটারও অনুমতি নাই। যেমন হয়েছে ডানের চিত্রে। পুরো ফাংশনের কথা না ভেবে একটা ব্যবধির কথাও আলাদা করে ভাবা যায়। তবে পার্থক্যটা উপরে যা বললাম তেমন।

যেমন দেখো, e^x-এর চেহারা

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

এর সকল মানের জন্যই $f'(x) = e^x$ সর্বদা ধনাত্মক। তাহলে এর রেখা কখনোই নিচে নামবে না। এটা হলো কড়াকড়িভাবে ক্রমবর্ধমান ফাংশন (strictly increasing)।

আবার $f(x) = 2^{-x}$-এর চেহারা দেখো-

$$f(x) = 2^{-x}$$

$$f'(x) = -2^{-x}\ln 2$$

x এর সব মানের জন্যই এটার মান ঋণাত্মক। তার মানে হলো আমরা যতই ডানে যেতে থাকব, ফাংশনটা নিচের দিকে যেতে থাকবে। x-এর মান যতই বাড়বে, $f(x)$ ততই কমতে থাকবে। এ ধরনের ফাংশনকে বলা যায় কড়াকড়িভাবে ক্রমহ্রাসমান (strictly decreasing) ফাংশন।

উদাহরণ 7.10: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 6$ ফাংশনটি কোন কোন ব্যবধিতে কড়াকড়িভাবে ক্রমবর্ধমান বা কড়াকড়িভাবে ক্রমহ্রাসমান নির্ণয় করো।

এখানে,
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 15x + 6 \\ \therefore f'(x) &= 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) \\ &= 3(x-1)(x-5) \end{aligned}$$

যেখানে ফাংশনটি কড়াকড়িভাবে ক্রমবর্ধমান সেখানে, $f'(x) > 0$

বা, $3(x-1)(x-5) > 0$

বা, $(x-1)(x-5) > 0$

এখানে খেয়াল করো, দুটো রাশির গুণফল ধনাত্মক হবে, যখন দুটোই ঋণাত্মক বা দুটোই ধনাত্মক। x এর মান 1 এর ছোট হলে (x-1) এবং (x-5) দুটো রাশিই ঋণাত্মক হবে। x এর মান 5 এর বড় হলে দুটোই ধনাত্মক হবে। তাহলে, সমাধান হবে $x < 1$ বা $x > 5$।

তাহলে $(-\infty, 1)$ এবং $(5, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হবে যখন, $f'(x) < 0$

বা, $3(x-1)(x-5) < 0$

বা, $1 < x < 5$

$(x-a)(x-b)$ আকৃতির রাশিগুলোর অসমতার সমাধান মনে রাখার একটা সহজ উপায় আছে। যদি a, b এর ভেতর a ছোট হয়, $(x-a)(x-b) > 0$ হবে যখন $x < a$ অথবা $x > b$.
অর্থাৎ, 'ছোটটার চেয়েও ছোট, বড়টার চেয়েও বড়'।

$(x-a)(x-b) < 0$ হবে যখন $a < x < b$।
অর্থাৎ, 'ছোটটার থেকে বড় এবং বড়টার চেয়ে ছোট'।

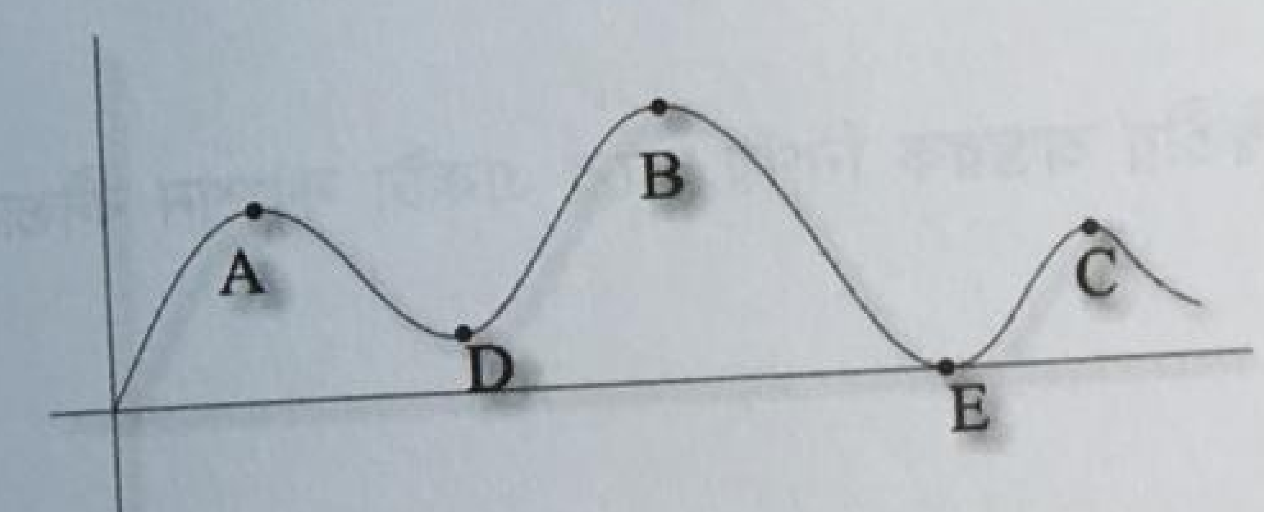
ধনাত্মক, ঋণাত্মক চিন্তা করে বলতে পারো কি, এই ব্যাপারগুলো এমন কেন হয়? $(x-1)(x-2)(x-3)$ এর জন্য কেমন হবে ভাবতে পারো কি? কিংবা $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ এর জন্য? দারুণ প্যাটার্ন পেয়ে যেতে পারো!

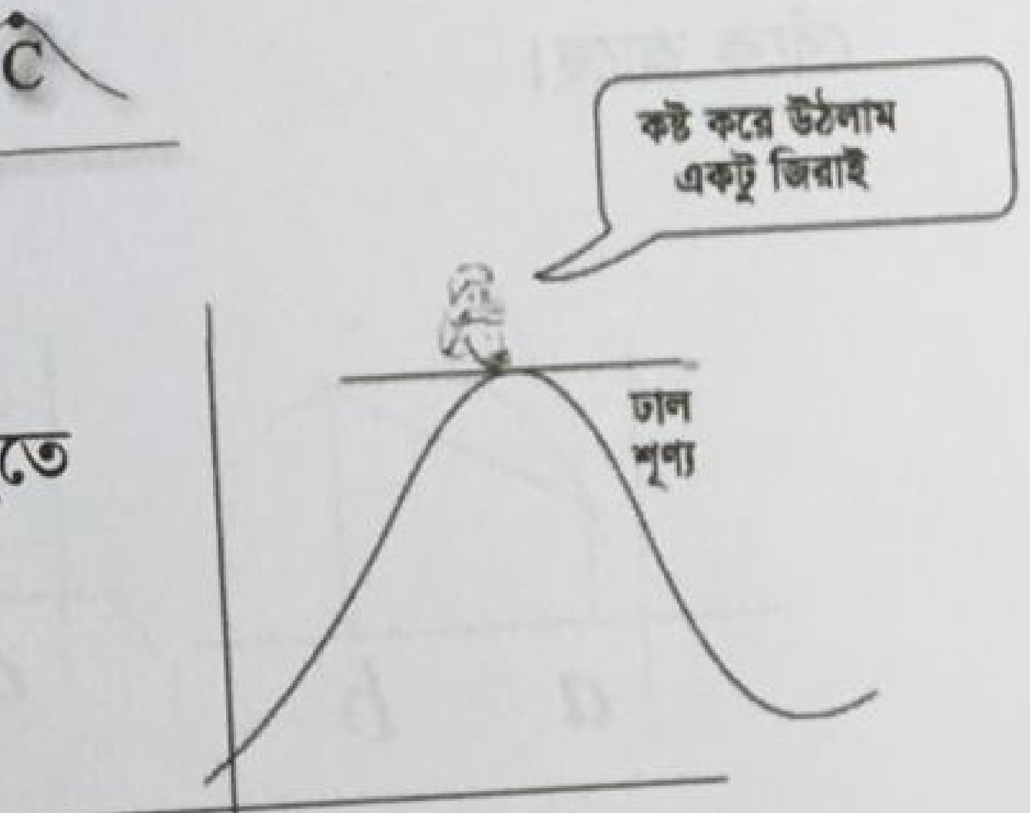
$f'(x) > 0$ হলে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক, স্পর্শক ওপরের দিকে উঠছে।

$f'(x) < 0$ হলে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক, স্পর্শক নিচে নামছে।

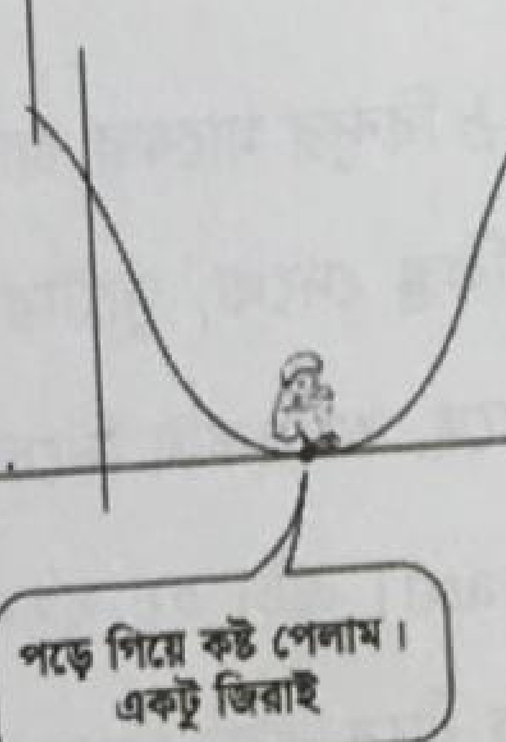
তাহলে, $f'(x) = 0$ এর মানে কী হতে পারে? $f'(x) = 0$ মানে ওখানে স্পর্শকের ঢাল শূন্য। তার মানে স্পর্শকের মান বাড়ছেও না, কমছেও না, x অক্ষের সমান্তরাল হয়ে আছে। এমন হতে পারে মোট চার রকম ক্ষেত্রে—

ঢাল শূন্য যখন যখন



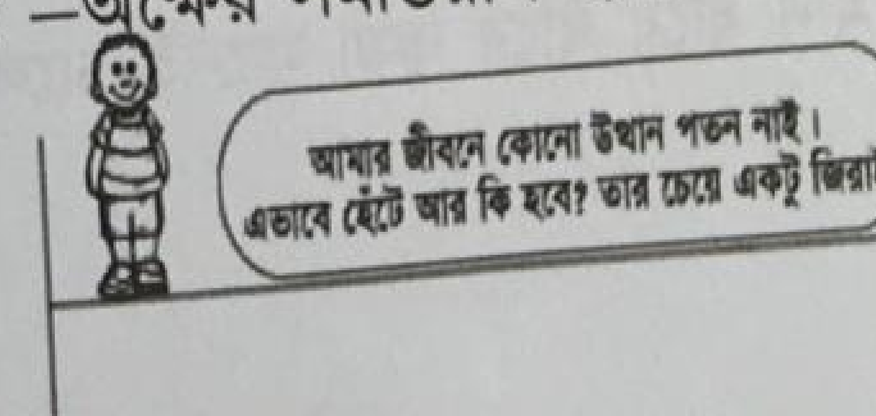


(1) যখন ফাংশনের মানটি চূড়াবিন্দুতে
(A, B, C এমন বিন্দুগুলোতে)



(2) যখন ফাংশনটির মান খাদে
(D, E এমনসব বিন্দুতে)

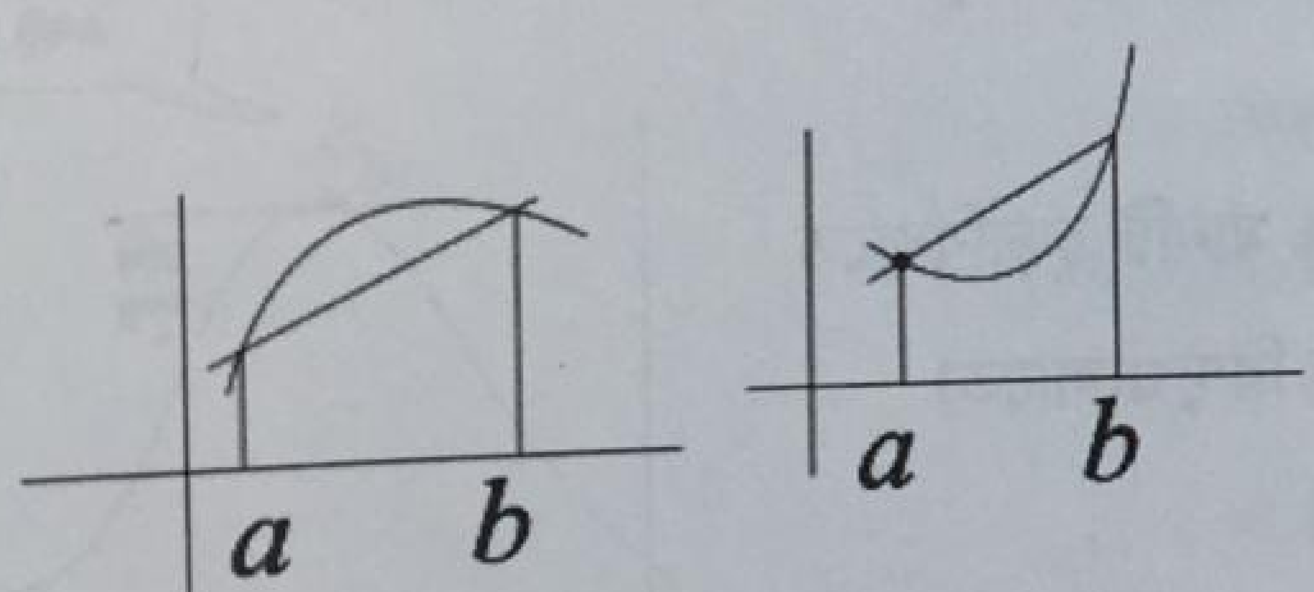
(3) যদি ফাংশনটা নিজেই X –অক্ষের সমান্তরাল হয়।



(4) ??

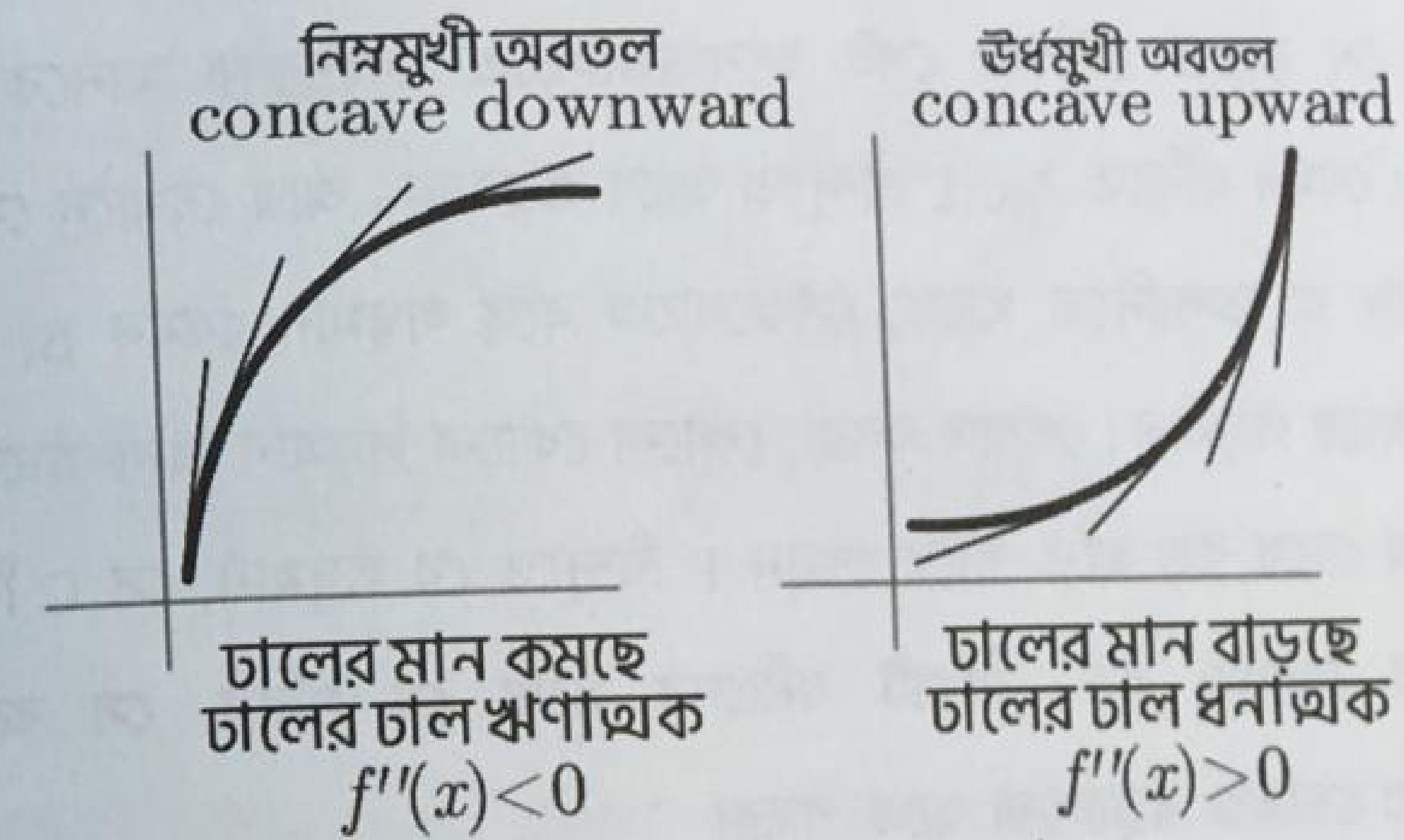
$f''(x)$ একটা ফাংশন সম্পর্কে কী বলে?

সেকেন্ড ডেরিভেটিভ বা দ্বিতীয় অন্তরক নির্ণয় করে একটা ফাংশন কীভাবে বেঁকে আছে।

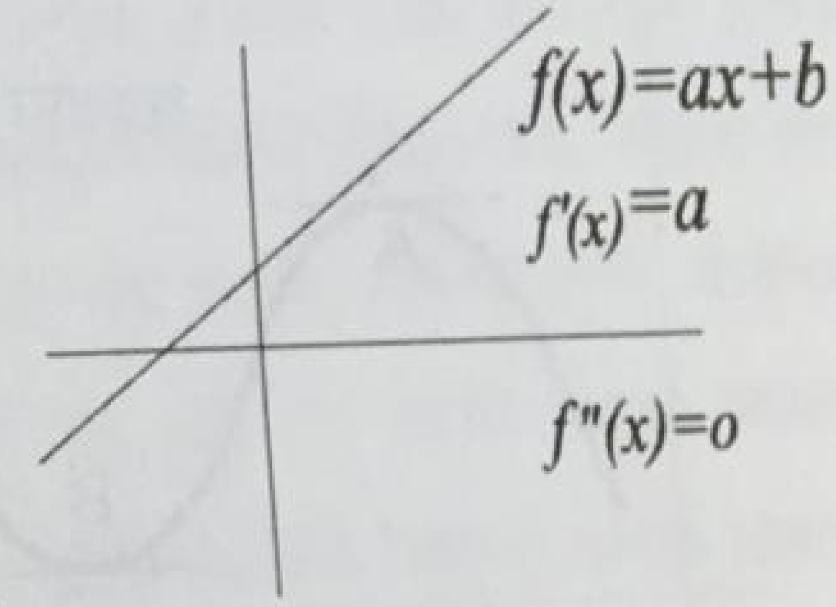


a এবং b বিন্দুর মাঝের জায়গাটুকুতে তাকাও। দুটো ফাংশনের লেখই বেঁকে আছে। কিন্তু দেখো, দুটোর বক্রতা দুই রকম। একটা যেন ওপরের দিকে ফুলে আছে, আরেকটা নিচের দিকে বসে গেছে। প্রথমটাকে বলে concave downward। এটা হয় যখন $f''(x)$ ঋণাত্মক হয়। এর মানে হলো ঢালের মান ধীরে ধীরে কমে যাচ্ছে। তীরগুলোর দিকে তাকিয়ে বোঝার চেষ্টা করো। ঢালের মান ধীরে ধীরে কমা মানেই ঢালের ঢাল ঋণাত্মক বা $f''(x) < 0$

অন্যটাতে ঢালের মান ধীরে ধীরে বেড়ে যাচ্ছে। তখন হয় concave upward. এখানে ঢালের ঢাল ধনাত্মক, মানে $f''(x) > 0$ ।



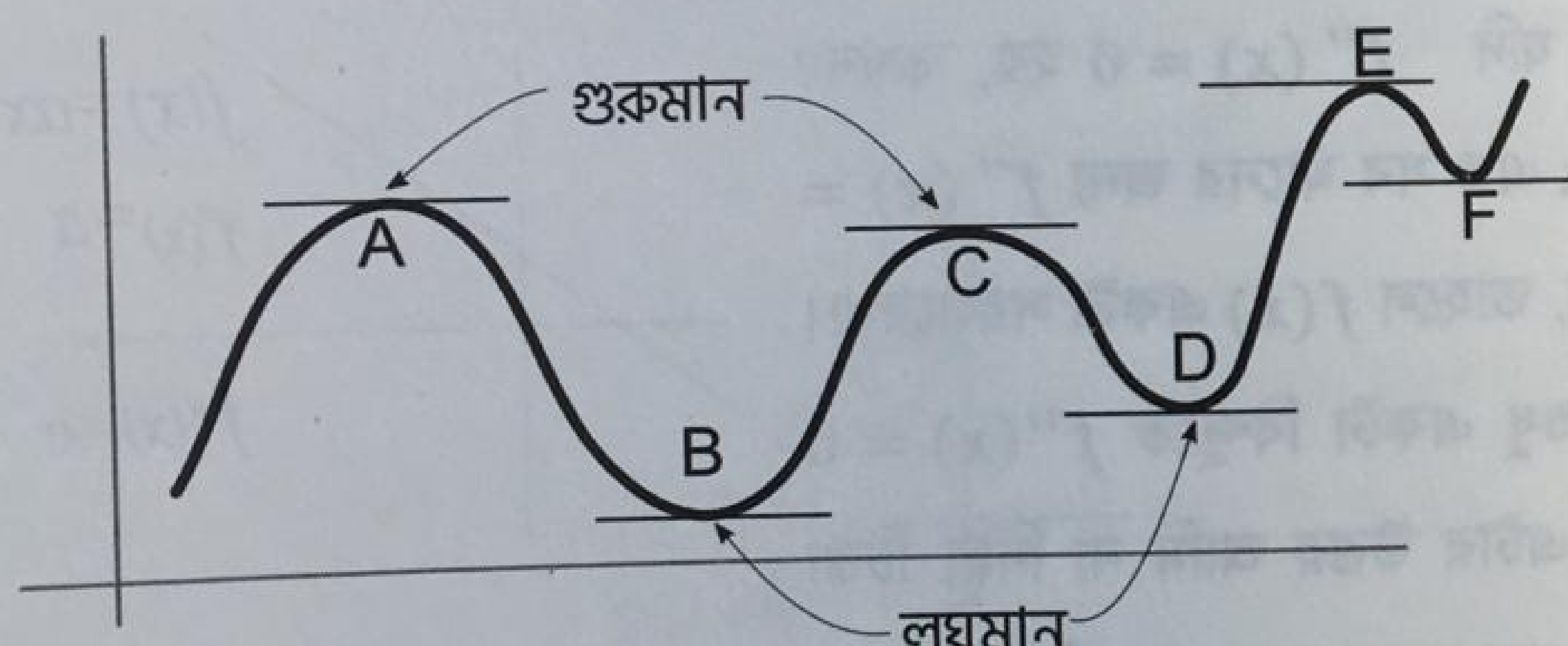
আর যদি $f''(x) = 0$ হয়, তখন?
যদি x এর সব মানের জন্য $f''(x) = 0$ হয়, তাহলে $f(x)$ একটা সরলরেখা।
যদি শুধু একটা বিন্দুতে $f''(x) = 0$ হয়? এটার উত্তর আমি না দিই! চিন্তা করে বের করতে পারো নাকি দেখো তো!



এগুলো জানা হয়ে গেলে এখন আমরা প্রস্তুত একটা দারুণ বিষয় জানার জন্য। এটাকে বলে ফাংশনের গুরুমান ও লঘুমান।

৭.৪ গুরুমান ও লঘুমান

মানুষের জীবনে ওঠানামা থাকে। ওঠানামা থাকে গ্রাফের চেহারাতেও! যেখানে যেখানে সে চূড়ায় পৌঁছায় সেই জায়গাগুলোতে ফাংশনের মানকে বলে গুরুমান। যেমন ছবিতে A,C,E বিন্দুতে আছে গুরুমান। আর যেখানে যেখানে তারা খাদে বা তলানিতে থাকে, সেগুলোকে বলে লঘুমান যেমন B, D, F বিন্দুতে আছে লঘুমান। খেয়াল করো, কোনো কোনো লঘুমান অন্য আরেকটা গুরুমানের চেয়ে বড় হতে পারে যেমন F বিন্দুতে যে লঘুমান, সে C বিন্দুর গুরুমানের চেয়েও বড়। বিরাট ধনীদের মধ্যে যে গরিব, সে অনেক বড়লোকের চেয়েও বড়লোক হতে পারে!

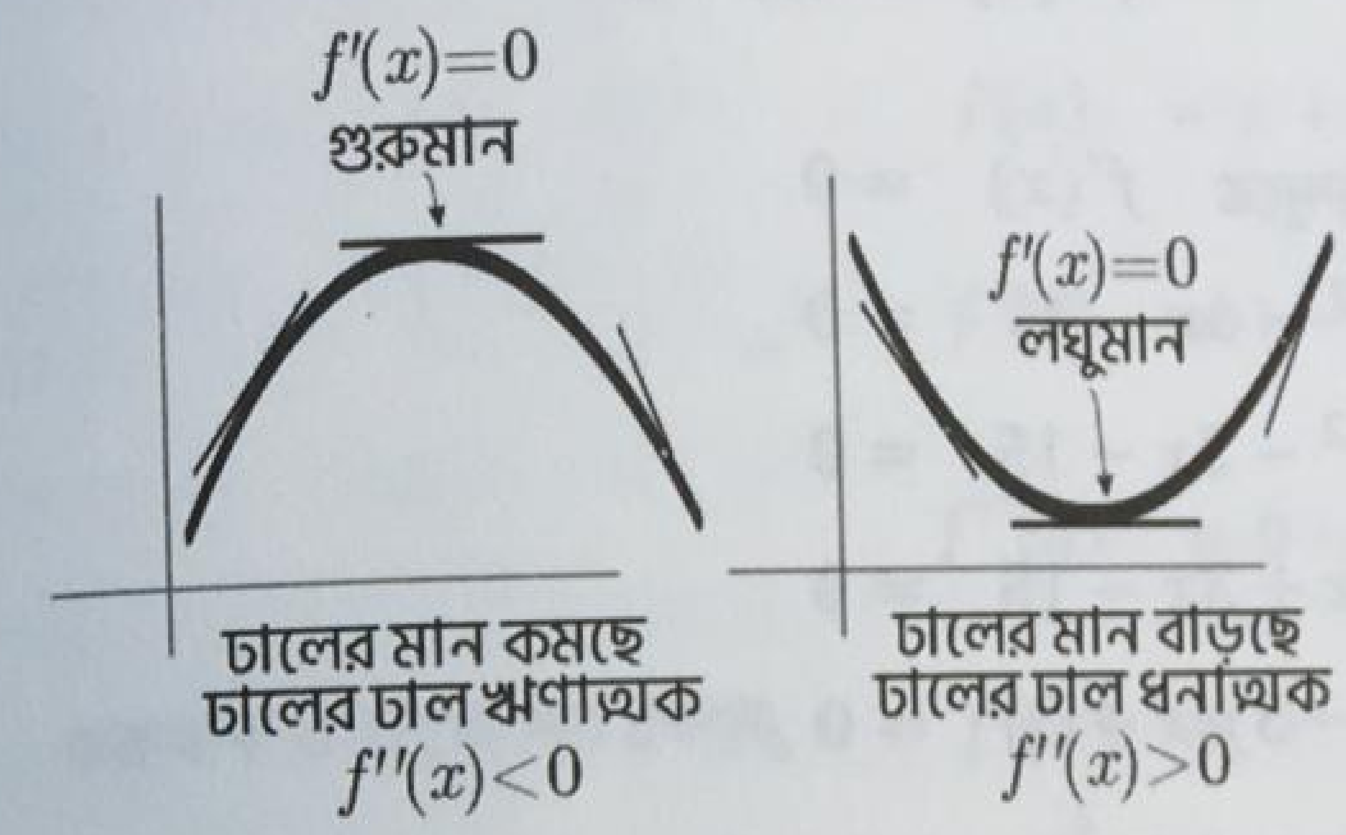


যাহোক কোন কোন বিন্দুতে উরুমান আর লঘুমান পাওয়া যাবে, সেটা বের করা যাবে কী করে?

প্রথমে খেয়াল করো, গুরুমান হোক কিংবা লঘুমান সেখানে ঢাল হয় শূন্য।

তার মানে ঢাল শূন্য হলে আমরা সন্দেহ করতে পারি গুরুমান বা লঘুমান আছে। কিন্তু নিশ্চিত হবো কী করে। তখন করা হয় Second Derivative test বা দ্বিতীয় অন্তরজ পরীক্ষা। দ্বিতিয় অন্তরজ যদি ধনাত্মক হয় তাহলে পাওয়া যায় লঘুমান। আর এটা ঋণাত্মক হলে পাওয়া যায় গুরুমান।

কেন? কারণটা দারুণ! খেয়াল করো- প্রথমে একটা গুরুমানের ক্ষেত্রে দেখো।



গুরুমানের একটু আগে দেখো ঢাল চিলও ধনাত্মক। এরপর হলো শূন্য তারপর হলো ঋণাত্মক। বামের গ্রাফটার দিকে তাকাও। ওর জীবনকে ব্যাখ্যা করি। ধনাত্মক ঢালকে ভালো আর ঋনাত্মককে খারাপ দিয়ে বলি। আগে ঢাল ছিল ধনাত্মক, ছিল অনেক ভালো, এরপর অল্প ভালো, এরপর চলে, তারপর খারাপ, তারপর অনেক খারাপ। বলো তো এই যে ভালো থেকে খারাপ হওয়াটা, এই পরিবর্তনটা কি ভালো না খারাপ? সেটা খারাপ! অর্থাৎ ঢালের পরিবর্তন হলো ঋণাত্মক। ঢালের ঢাল ঋণাত্মক, $f''(x) < 0$।

ঠিক একইভাবে তুমি এখন লঘুমানের জন্য ভাবতে পারো। যদিও সে লঘুমানে একটা তলানিতে আছে। এর আরেকটা দার্শনিক মানে হলো, এখন তার ঘুরে দাঁড়াবার সময়। এরপর থেকে তার মান বাড়তে থাকবে। ঢালের ঢাল ধনাত্মক! $f''(x) > 0$।

<u>উদাহরণ 7.11:</u> $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ ফাংশনটির গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় করো।

প্রদত্ত ফাংশন, $\quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$$

এবং $$f''(x) = 6x - 6$$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন বিন্দুতে $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad 3x^2 - 6x - 45 = 0$$

বা, $$x^2 - 2x - 15 = 0$$

বা, $$x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$$

বা, $$(x-5)(x+3) = 0$$

$\therefore$ $x - 5 = 0$ অথবা $x + 3 = 0$

$x = 5$ বা, $x = -3$

তার মানে $x = 5$ এবং $x = -3$ এর মাঝেই কোনো একটা বিন্দুতে গুরুমান এবং অন্যটাতে লঘুমান রয়েছে।

যখন, $x = 5$, $f'(x) = 6 \cdot 5 - 6$

$$= 30 - 6$$

$= 24$, যা ধনাত্মক।

$\therefore x = 5$ বিন্দুতে ফাংশনটির একটি লঘুমান রয়েছে। মানটি হলো,

$$f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5 + 13 = -72$$

যখন, $x = -3$,

$$f''(x) = 6 \cdot (-3) - 6 = -18 - 6 = -24 < 0$$

$\therefore x = -3$ তে রয়েছে গুরুমান। সেটি হলো

$$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 45 \cdot (-3) + 13$$

$$= -27 - 27 + 135 + 13 = 94$$

উদাহরণ 7.12: দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান, লঘুমান অপেক্ষা বৃহত্তর।

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 - \frac{(-2)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

গুরুমান ও লঘুমানের ক্ষেত্রে, $f'(x) = 0$

$$\therefore \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

বা, $$\frac{1}{x^2} = 1$$

বা, $$x^2 = 1$$

বা, $$x = 1, -1$$

$x = 1$ বিন্দুতে, $f''(x) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$

সুতরাং, এখানে লঘুমান পাওয়া যাবে। মানটি হলো: $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$।

$x = -1$ বিন্দুতে, $f''(x) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$ ।

সুতরাং এখানে গুরুমান পাওয়া যাবে। মানটি হলো,

$$f(-1) = (-1) + \frac{1}{(-1)} = -2$$

গুরুমান $= -2$, লঘুমান $= +2$.

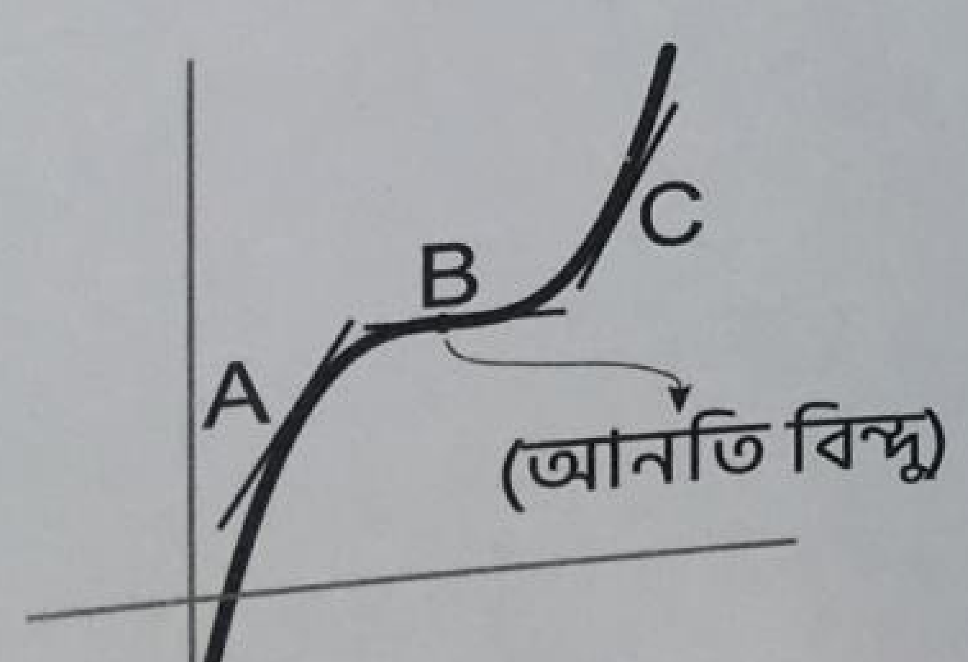
গুরুমান $<$ লঘুমান। (প্রমাণিত)

অঙ্ক তো শেষ। প্রমাণ তো করে ফেললাম। কিন্তু ব্যাপারটা কী হলো? গুরুমান কীভাবে লঘুমান থেকে ছোট হয়? অনেকগুলো গুরুমান থাকলে নাহয় মেনে নেওয়া যায়। একটাই যখন গুরুমান এবং একটাই যখন লঘুমান, তখন গুরুমান কী করে লঘুমান থেকে ছোট হয়? ব্যাপারটা মজার। তাড়াতাড়ি গুগল করো-

'plot $x + \frac{1}{x}$'। নাহলে এই code টা স্ক্যান করো তোমার স্মার্টফোন দিয়ে!

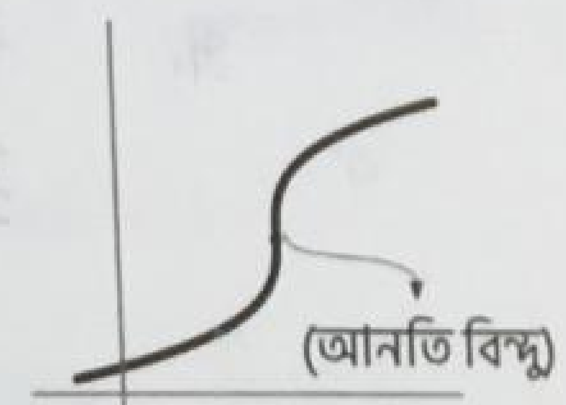
৭.৫ আনতি বিন্দু (Inflection point):

$f(x) = x^3 + 2$ ফাংশনটার ছবি এঁকেছি আমরা। দেখো, ফাংশনটার ওপর A বিন্দুতে ঢাল ছিল বেশ খাড়া এবং ধনাত্মক। এরপর এসে ঢালের মানটা একটু কমল, তবে এখনো সেটা ধনাত্মক। B তে এসে কমতে কমতে ঢাল শূন্য হয়ে গেল! তারপর আবার বাড়তে শুরু করল। দেখো, এর আগে ফাংশনটার দ্বিতীয় অন্তরক ছিল ঋণাত্মক, বক্রতা ছিল অবতল নিম্নমুখী। আর এর পরে গিয়ে দ্বিতীয় অন্তরক হলো ধনাত্মক মানে বক্রতা হয়ে গেলো অবতল উর্ধ্বমুখী।



এমন যেই বিন্দুতে গিয়ে ফাংশনের অবতলতা বদলে যায় (ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক বা ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক) তাকে বলে আনতি বিন্দু বা Inflection point।

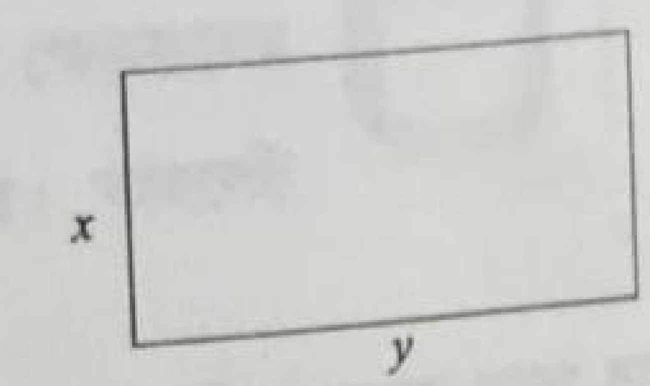
খেয়াল করো, এটা সেই 'চার' নম্বর উপায়, যেভাবে একটা ফাংশনের ঢাল কোনো বিন্দুতে শূন্য হতে পারে।



তবে ঢাল শূন্য না হয়েও Inflection point পাওয়া যেতে পারে। জনসংখ্যার 'logistic model' এর একটা ছবি দেখো। এখানে A বিন্দুর আগে অবতলতা ছিল উর্ধ্বমুখী, পরে অবতলতা নিম্নমুখী। এটাও একটা inflection point, এখানে ঢাল হয় অসংজ্ঞায়িত। এছাড়াও এই ধরণের যেকোনো রেখাকে যদি ঘুরিয়ে দাও, তাহলে মাঝে আনতি বিন্দুটা থেকেই যাবে, কারণ অবতলতা পরিবর্তন হবেই।

গুরুমান-লঘুমানের গাণিতিক সমস্যা:

উদাহরণ 7.12: এক রাখাল বালিকা রাক্ষসের বন্দিশালা থেকে উদ্ধার করেছে ক্যাবলা রাজকুমারকে। রাজা খুশি হয়ে রাখাল বালিকাকে 1000 মিটার লম্বা একটি দড়ি দিয়ে বললেন, 'নদীর পাড়ে আমার অঢেল জমি। এই দড়ি দিয়ে তুমি যতবড় জায়গা ঘিরতে পারবে, ততটুকু জমিই তোমার! তবে জমিটা হতে হবে চতুর্ভুজ আকৃতির আর সেই চতুর্ভুজের সবগুলো কোণ সমকোণ'। বলো তো, বুদ্ধিমান রাখাল বালিকা কীভাবে জমি ঘিরেছিল?



ধরি, চতুর্ভুজের দুটি ধার x এবং y

$\therefore$ ক্ষেত্রফল, $A = xy$

এখানে A ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ করতে হবে।

আমরা দেখি, $2(x+y) = 1000$ [পরিসীমা 1000 মিটার]

বা, $x + y = 500$

$\therefore\quad y = 500 - x$

তাহলে, $A = x(500 - x) = 500x - x^2$

$\therefore\quad A' = 500 - 2x$

এবং $A'' = -2$

A সর্বোচ্চ হবে যখন, $A' = 0$

বা, $500 - 2x = 0$

বা, $x = 250$

যেহেতু, $A'' = -2 < 0, \therefore x = 250$-এ ফাংশনটির গুরুমান রয়েছে।

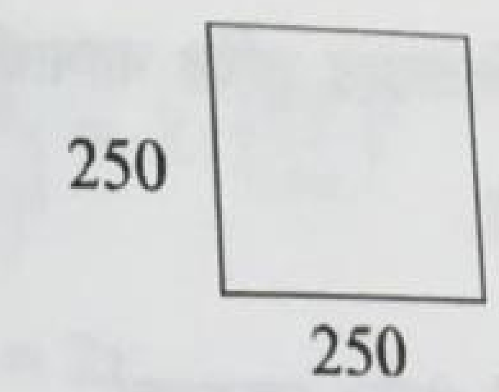
খেয়াল করো,

$$y = 500 - x$$
$$= 500 - 250$$
$$= 250$$
$$\therefore x = y = 250$$

তার মানে রাখাল বালিকাকে একটি বর্গক্ষেত্র আকারের জমি ঘিরতে হবে।

সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল হবে $= 250^2$

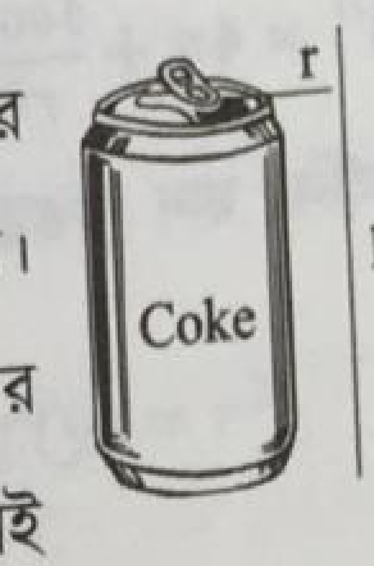
$= 62500$ বর্গমিটার।



এ ধরনের অঙ্ক করার বুদ্ধি?

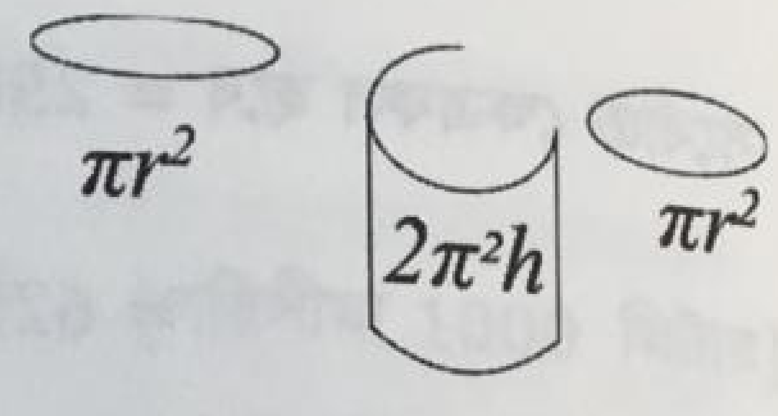
প্রথমে বের করো কোন ফাংশনের মানটি সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বানাতে হবে। যেমন এখানে $A = xy$। দেখবে সেখানে একের বেশি চলক আছে (x, y)। এবার যে তথ্য দেওয়া আছে সেখান থেকে একটা চলককে অন্যটা দিয়ে প্রকাশ করো (যেমন y=500-x)। এটা ওই ফাংশনে বসিয়ে দিলেই এক চলকের একটা ফাংশন পাবে। এটার গুরুমান, লঘুমান বের করা সোজা! দেখি, আরেকটা অঙ্ক করা যাক।

উদাহরণ 7.13: একটা বেলনাকৃতির (cylindrical) কোকের বোতলে ২৫০ মিলি কোক আঁটে। বোতলটার আকৃতি কেমন হলে সবচেয়ে কম অ্যালুমিনিয়াম ব্যবহার করে বোতলটি বানানো যাবে? অর্থাৎ এর উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ কেমন হবে? [ধরে নাও, ওপরে এবং নিচে দুটো সমতল বৃত্তাকার পাত আছে।]



সমাধান: এখানে, অ্যালুমিনিয়ামের পরিমাণ হবে সিলিন্ডারের তলগুলোর মোট ক্ষেত্রফল এবং পুরুত্বের গুণফল। পুরুত্বকে ধ্রুব বিবেচনা করলে আসলে মোট ক্ষেত্রফলের পরিমাণকে আমাদের সর্বনিম্ন বানাতে হবে। তাহলেই সবচেয়ে কম অ্যালুমিনিয়াম লাগবে।

সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং h উচ্চতা হলে,



$1ml = \frac{1}{1000} L = \frac{1}{1000}\ cm^3$

মোট পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \ldots\ldots\ldots (i)$$

দেওয়া আছে, আয়তন $= 250\ mL$

বা, $\pi r^2 h = 250\ \text{cm}^3$

বা, $h = \dfrac{250}{\pi r^2}$

(i) হতে, $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{250}{r^2}$

$= 2\pi r^2 + \dfrac{500}{r}$

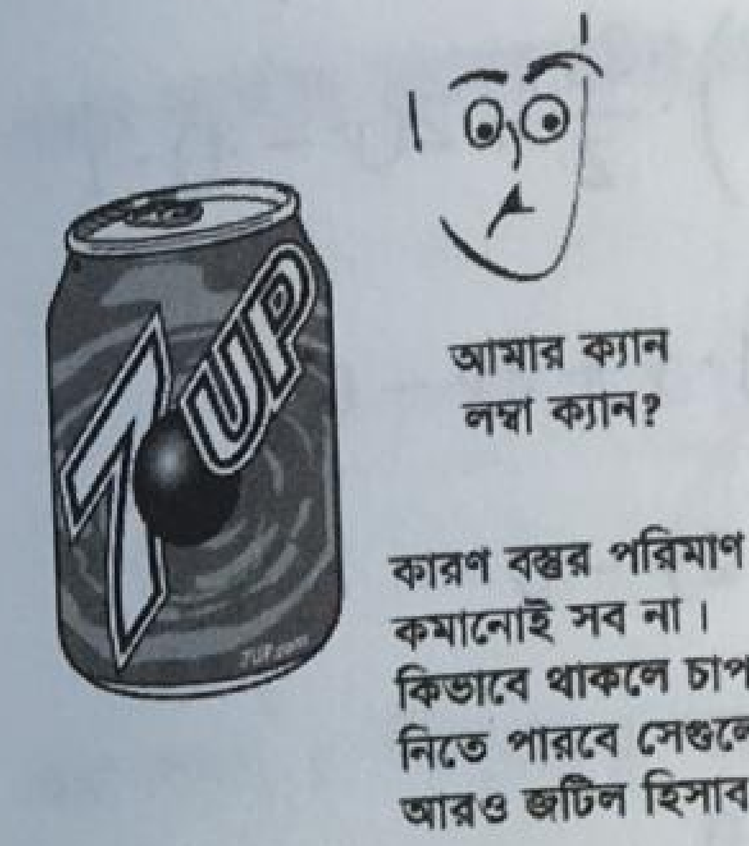
A এর মান সর্বোচ্চ হবে যখন, $A' = 0$

বা, $4\pi r - \dfrac{500}{r^2} = 0$

বা, $4\pi r^3 - 500 = 0$

$A'' = 4\pi + \dfrac{1000}{r^3}$, সর্বদা ধনাত্মক। ফলে $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{4\pi}}$ -এ ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে। এ ক্ষেত্রে ক্যানটির উচ্চতা হবে,

$$h = \frac{250}{\pi r^2} = \frac{250}{\pi\left(\frac{500}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

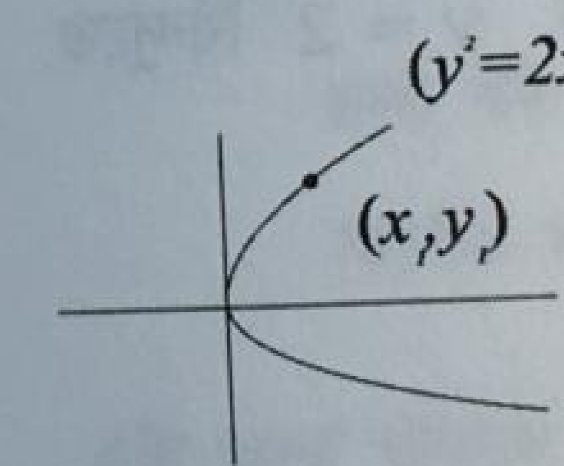


$$\therefore h = \frac{2\cdot\frac{500}{4\pi}}{\left(\frac{500}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\cdot\left(\frac{500}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2r$$

অর্থাৎ সিলিন্ডারের ব্যাস হতে হবে উচ্চতার সমান। তাহলে খরচ সবচেয়ে কমানো যাবে।

উদাহরণ 7.14: $y^2 = 2x$ পরাবৃত্তের ওপর কোনো বিন্দুটি (1,4)-এর সবচেয়ে নিকটবর্তী?



সমাধান: পরাবৃত্তের ওপর কোনো বিন্দু (x, y) হতে (1,4)-এর দূরত্ব, r এর মান সর্বনিম্ন হতে হবে। লক্ষ করি, যখন r-এর মান সর্বনিম্ন, তখন r^2 মানও সর্বনিম্ন হবে।

$$r^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2$$

$$f(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2 \quad [\text{ধরি } f(y) = r^2]$$

y-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$f'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2}-1\right)\cdot\frac{2y}{2}+2(y-4)\cdot 1$$
$$= \left(\frac{2y^2}{2}-2\right)\cdot y + 2y - 8$$
$$= y^3 - 2y + 2y - 8$$
$$= y^3 - 8$$

$f(y)$ সর্বনিম্ন হবে যখন, $f'(y) = 0$

বা, $y^3 - 8 = 0$

বা, $y^3 = 8 = 2^3$

$\therefore$ $y = 2$

যেহেতু, $f''(y) = 3y^2$, যা ঋণাত্মক হতে পারে না, $y = 2$ বিন্দুতে ফাংশনের একটি সর্বনিম্ন মান রয়েছে।

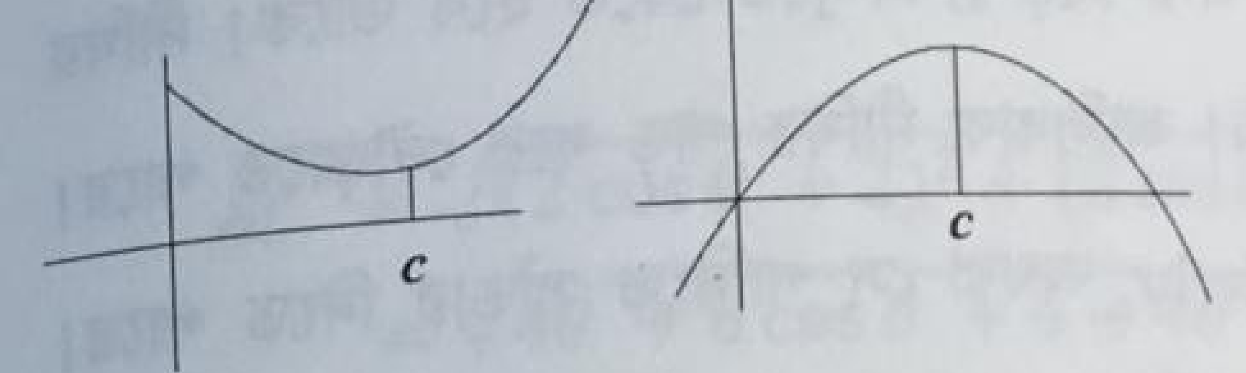
$\therefore y = 2x^2$ থেকে পাই, $x = \frac{y^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2.$

তাহলে বিন্দুটি হবে (1,2)

খেয়াল করো, এখানে আসলে $f''(y)$ সর্বত্র ধনাত্মক নয়। $y = 0$ বিন্দুতে এর মান শূন্য। এমন ক্ষেত্রে পরম সর্বনিম্ন নিশ্চিত হওয়ার আরেকটা উপায় আছে যাকে বলে প্রথম অন্তরজ পরীক্ষা।

সোজা কথা হলো, একটা বিন্দুতে ঢাল শূন্য হলে তার আগে পরে যদি সব জায়গায় মান বেশি থাকে, তাহলে সেই বিন্দুতে আছে সর্বনিম্ন মান। আগে পরে যদি সব জায়গায় মান কম থাকে, তাহলে সেই বিন্দুতে আছে সর্বোচ্চ মান।

পরম সর্বোচ্চ মানের জন্য প্রথম অন্তরজ পরীক্ষা:



ধরা যাক, C বিন্দুতে f ফাংশনটির চরম মান রয়েছে।

(a) যদি এর আগের সমস্ত x এর জন্য অর্থাৎ $x < C$ এর জন্য সর্বদা $f'(x) < 0$ এবং C এর পরের সমস্ত বিন্দুর জন্য সর্বদা $f'(x) > 0$ হয়, তাহলে C বিন্দুতে ফাংশনটির একটি পরম সর্বনিম্ন মান রয়েছে।

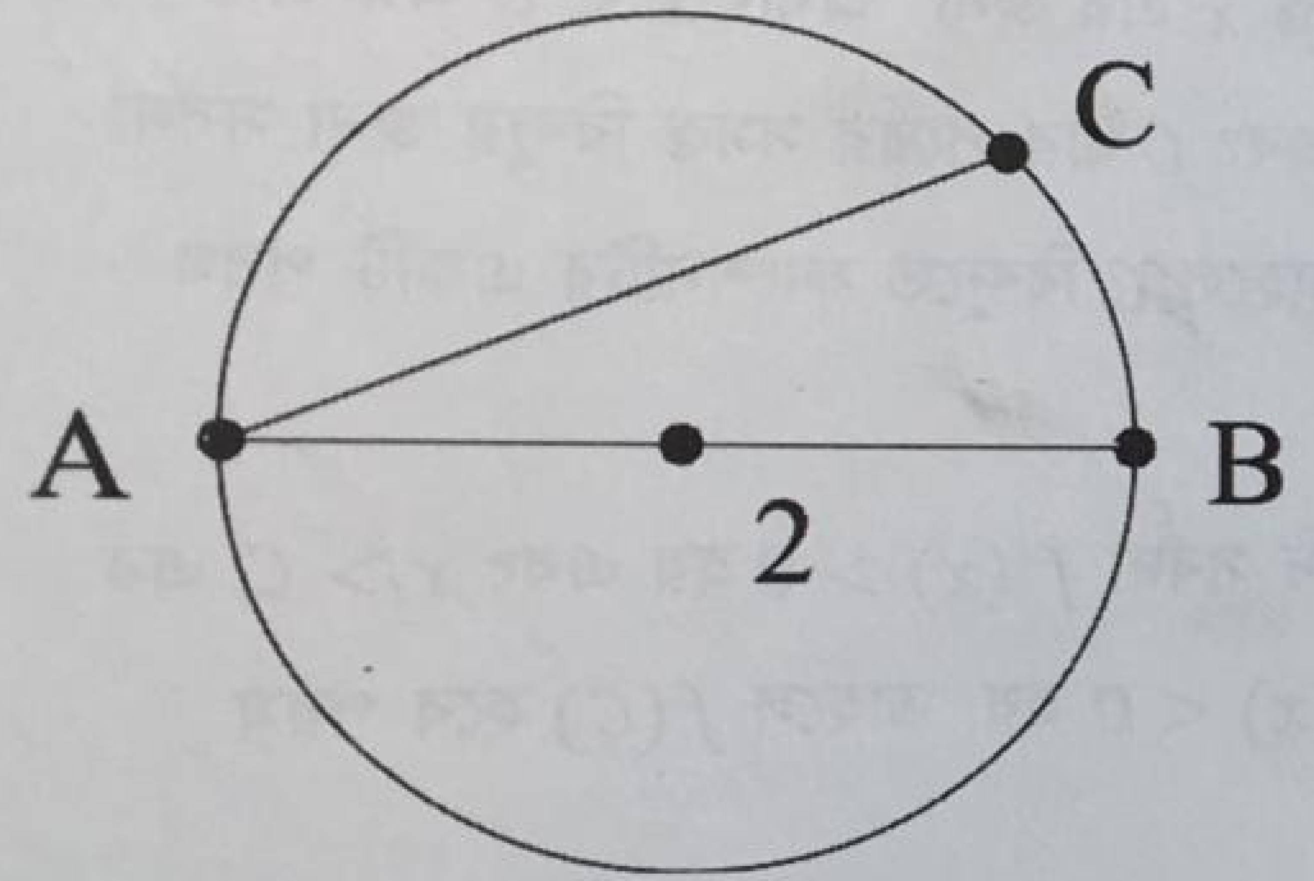
(b) $x < C$ এর জন্য যদি সর্বদা $f'(x) > 0$ হয় এবং $x > C$ এর জন্য যদি সর্বদা $f'(x) < 0$ হয়, তাহলে $f(C)$ হবে পরম সর্বোচ্চ মান।

এটা জানা থাকলে আগের অঙ্কতে ব্যবহার করতে পারতাম। ওখানে,

$$f'(y) = y^3 - 8$$

y<2-এর জন্য f (2)<0 এবং y>2-এর জন্য f (2)>0. সুতরাং, f(2) হবে পরম সর্বনিম্নমান।

উদাহরণ 7.15: আলিবাবা একটা বৃত্তাকার দীঘির পাড়ে A বিন্দুতে এসে ভাবনায় পড়ে গেল। দীঘির অন্যপাড়ে B বিন্দুতে যেতে হবে তাকে। দীঘির ব্যাসার্ধ 2 মাইল, বিরাট দীঘি। আলিবাবা দীঘির পাড় ধরে দৌড়াতে পারে। তার দৌড়ানোর গতি 4 mile/hr. অথবা সে পানিতে সাঁতার দিতে পারে। সাঁতারের গতি 2 mile/hr. যদি সবচেয়ে তাড়াতাড়ি পৌঁছাতে চায়, তার কীভাবে যাওয়া উচিত?

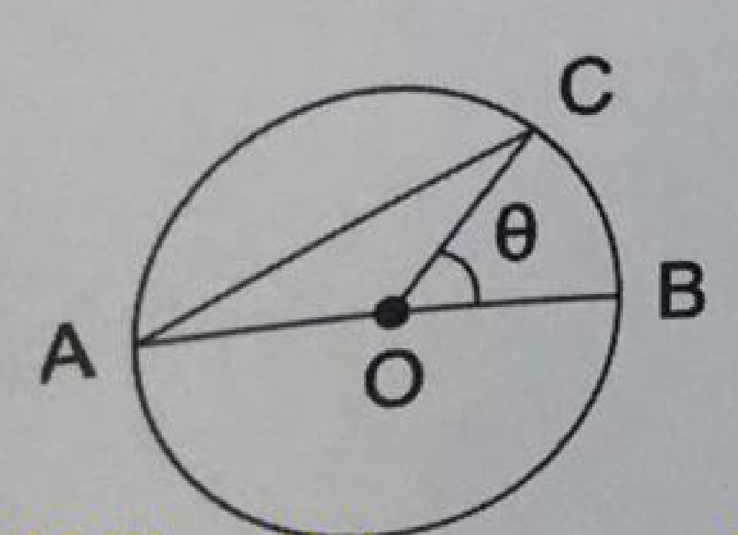


[ধরে নাও, তার ফিটনেস দারুণ! 5মাইল সাঁতরালেও কিছু হবেনা।]

উত্তর: মনে করি সে C বিন্দু পর্যন্ত সাঁতরে যাবে, তারপর দৌড়াবে।

ধরি, কেন্দ্র $O, \angle COB = \theta$.

O কে মূলবিন্দু ভাবলে A বিন্দুর স্থানাংক (-2,0). B বিন্দুর স্থানাংক (2,0). C এর স্থানাংক $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$)



$\therefore$ $BC = 2\cdot\theta$ [কোণ= (বৃত্তচাপ)/(ব্যাসার্ধ), ∴বৃত্তচাপ= কোণ·ব্যাসার্ধ]

$$AC = \sqrt{(2\cos\theta + 2)^2 + (2\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{4\theta + 8\cos\theta + 4 + 4\theta} = \sqrt{8\cos\theta + 8}$$
$$= \sqrt{8(1+\cos\theta)}$$
$$= \sqrt{8\cdot 2\frac{\theta}{2}}$$
$$= 4\cos\frac{\theta}{2}$$

মোট সময় = ACযেতে সময়+ BCযেতে সময় [বেগ= দূরত্ব/সময় ∴সময়= দূরত্ব/বেগ]

$$= \frac{4\cos\frac{\theta}{2}}{2} + \frac{2\theta}{4}$$

$$\therefore f(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}$$ [মোট সময় যেহেতু θ এর ফাংশন, ধরি, $t = f(\theta)$]

$f(\theta)$ সর্বনিম্ন হবে যখন $f'(\theta) = 0$

বা, $-\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} = 0$

বা, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{বা, } \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

অর্থাৎ, θ এর মান যখন 60°, তখন সবচেয়ে দ্রুত সে B বিন্দুতে পৌঁছাবে।

অধ্যায় ৮

টেইলর ও ম্যাকলরিনের ধারা

৮.১ টেইলরের ধারা

অনেক গণিতবিদ মনে করেন, টেইলরের সিরিজ হলো ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস থেকে পাওয়া সবচেয়ে দারুণ বিষয়। ইংরেজ গণিতবিদ ব্রুক টেইলর ১৭১২ সালে এই উপপাদ্য দেন, যদিও ১৬৭১ সালেই জেমস গ্রেগরি এমন একটা উপপাদ্য দিয়েছিলেন।

উপপাদ্যটা সাধারণত এভাবে লেখা হয়—

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a) + \frac{f''(a)}{3!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{n-1}(a)}{n!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

এভাবে কোনো ফাংশন f-কে a বিন্দুর চতুর্দিকে বিস্তার করা যায়। a বিন্দুতে কোনো ফাংশনের এবং তার অন্তরজগুলোর মান কত, সেটা যদি

জানা থাকে, তাহলে অন্য যেকোনো বিন্দুতে ফাংশনটার মান বের করে ফেলা যায়। এটা কেন এমন হলো, সেটা একটু দেখে নিই চলো।

ধরে নাও যে $f(x)$-কে $(x-a)$-এর ক্রমবর্ধমান পাওয়ারের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা সম্ভব। ধরি,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (i)$$

এখানে দেখো, c_0, c_1, c_2, c_3,... এমন করে মাত্র(?) অসীম সংখ্যক পদ আছে, যাদের মান বের করতে পারলেই চলবে। চলো বুকে সাহস নিয়ে শুরু করে দিই। প্রথমেই লক্ষ করো, $x = a$ বসালে দারুণ মজা, যত জায়গায় $(x-a)$ আছে সবাই শূন্য হয়ে যাবে। তাহলে (i) নং সমীকরণের দুইপাশে $x = a$ বসালে পাব $f(a) = c_0$

বা, $c_0 = f(a)$

বেশ! আমরা c_0-এর মান পেয়ে গেলাম। এবার c_1 কী করে পাব?

খেয়াল করো আমরা আগে c_0-এর মান বের করতে পেরেছিলাম, কারণ (i) নং সমীকরণে ওই বান্দার সাথে আর কেউ (কোনো x ওয়ালা পদ) ছিল না। তাহলে c_1-কেও একা বানিয়ে নিতে হবে। চলো এবার x-এর সাপেক্ষে দুই পাশকে ডিফারেন্সিয়েট করি। Chain Rule দিয়ে ভাবো। আমরা পাব,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

আবার $x = a$ বসালে আমরা পাবো, $f'(a) = c_1$

বাহ! c_1 ও পেয়ে গেছি! বুদ্ধিটাও বুঝে গেছি! চলো আবার differentiate করি—

$$f''(x) = 2\,c_2 + 3\cdot 2\,c_3(x-a)^1 + \cdots$$

$$\therefore f''(a) = 2\,c_2$$

বা, $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$

যাদেরকে পেলাম এ পর্যন্ত- $c_0 = \frac{f(a)}{1}$, $c_1 = \frac{f'(a)}{1}$, $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$

খেয়াল করো, হরে এই যে 1, 1, 2 এই সংখ্যাগুলো আসলে কারা? ভালো করে বোঝার জন্য আরও একবার ডিফারেন্সিয়েট করি—

$$f'''(x) = 3.2\,c_3 + \cdots$$

$$\therefore f'''(a) = 3.2\,c_3$$

$$\text{বা, } c_3 = \frac{f'''(a)}{3\cdot 2}$$

এবার বোঝা যাচ্ছে। এটা আসলে ফ্যাক্টোরিয়াল, আগের 1=0!, 1=1!, 2=2! আর এখন যাকে পেলাম সেই 6-কে লেখা যায় 3! $\therefore c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$

তাহলে, (i) এ c_0, c_1, c_2 এদের মান বসাই,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

এটাই টেইলরের ধারা।

৮.২ ম্যাকলরিনের ধারা ও তার ব্যবহার

টেইলরের ধারা জানার পর একটা ছোট্ট কাজ করে গণিতবিদ ম্যাকলরিন চিরস্মরণীয় হয়ে আছেন! তিনি বললেন a-এর মান শূন্য বসাও। অর্থাৎ $x = 0$-এর চতুর্দিকে বিস্তার করো। তাহলে পাব—

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

এটাকে তার নাম অনুসারে বলে ম্যাকলরিনের ধারা। এটা করে কী লাভ হলো?

বিরাট লাভ! তোমাকে যদি বলি অনেক সময় দেব, আর কাগজ কলম দেব। সায়েন্টিফিক না, একটা নরমাল ক্যালকুলেটর রাখতে পারো সাথে। এবার $\sin 3.2$-এর মান বের করো। কীভাবে করবে? কিংবা যদি বলি মান বের করো $e^{\frac{3}{5}}$ কিংবা $\ln 3.4$ এর? পারবে?

ম্যাকলরিনের এই ধারাটা দিয়ে আমরা এগুলোর সব মান বের করতে পারব। যদি কোনোভাবে একটা ফাংশনকে x এর এমন ক্রমবর্ধমান পাওয়ারের যোগফল দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহলে কাজ থাকে শুধু গুণ আর যোগের। অসীম পর্যন্ত যাওয়ার দরকার নাই। প্রথমে কয়েকটা ঘর গেলেই দারুণ অনুমান পাওয়া যাবে।

কীভাবে? চলো দেখি—

উদাহরণ 8.1: $(1 + x)^n$-কে ম্যাকলরিনের ধারা দিয়ে বিস্তৃত করো।

ধরি, $f(x) = (1 + x)^n$ $\qquad \therefore f(0) = (1 + 0)^n = 1$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} \qquad \therefore f'(0) = n$$

$$f''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2} \qquad \therefore f''(0) = n(n-1)$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1 + x)^{n-3} \qquad \therefore f'''(0) = n(n-1)(n-2)$$

তাহলে ম্যাকলরিনের ধারা থেকে পাব,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

বা, $(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$

বাহ! যেটা পেলাম এটাকে বলে Binomial Theorem, যেটা নিউটন বহু চিন্তা করে বের করেছিলেন!

একটা ব্যাপার বলি, x-এর মান যদি 3 হয় তাহলেও কি এটা খাটবে? উত্তর হলো—না! x-এর মান এখানে হতে হবে $-1 < x < 1$. তা নাহলে x^2, x^3 হলে মানটা বাড়তে থাকবে, গণিতের ভাষায় তখন ধারাটা অপসারী (Divergent) হয়ে যাবে অর্থাৎ ডানদিকে মান অসীমের দিকে পৌঁছে যাবে। $-1 < x < 1$ হলে হবে ভগ্নাংশ। ভগ্নাংশের পাওয়ার নিলে সেটা আরও ছোট হয়ে যায়। $(0.5)^2$ মানে $0.5 \cdot 0.5$ বা অর্ধেকের অর্ধেক $= 0.25$। তখন এমন ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর মানগুলো অসীম পর্যন্ত যোগ করলেও একটা সসীম যোগফল পাওয়া যায়। ধারাটা তখন অভিসারী (Convergent) হয়। 'নিমিখ পানে'র ২য় খণ্ডে ধারার অভিসারী হবার শর্তগুলো আরো বিস্তৃত করে বোঝানো হবে।

উদাহরণ 8.2: e^x-কে ম্যাকলরিনের ধারায় বিস্তার করো।

ধরি,

$$f(x) = e^x \qquad \therefore f(0) = e^0 = 1$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$f'(x) = e^x \qquad \therefore f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \qquad \therefore f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \qquad \therefore f'''(0) = 1$$

বুঝতেই পারছ, এখানে $f(0), f'(0), f''(0)$ এরা সবাই 1। পরেরগুলোতেও অন্যকিছু হবার কোনো লক্ষণ নেই।

তাহলে, $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

এটা আসলে x-এর সব মানের জন্যই সত্য। x-এর মান এবং তার পাওয়ার যত বড়ই হোক নিচের ফ্যাক্টোরিয়াল তাকে ধরে ফেলবে, এবং একটা সময়ের পর থেকে ভগ্নাংশগুলো 1 এর থেকে ছোট হতে থাকবে। এটা ব্যাখ্যা করা যায় অভিসৃতির পরীক্ষা "Ratio Test" থেকে, যেটা আমরা শিখব ২য় খণ্ডে।

খেয়াল করো, $x = \frac{3}{2}$ বসিয়ে কিছুক্ষণ হিসাব করলেই পেয়ে যাব $e^{\frac{3}{2}}$-এর মান।

উদাহরণ 8.3: ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\ln(1+x)$-এর মান বের করো।

$$\mathbf{f(x) = \ln(1+x)} \qquad \therefore \mathbf{f(0) = \ln 1 = 0}$$

$$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}} \qquad \therefore f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\mathbf{f''(x) = -1(1+x)^{-2}} \qquad \therefore f''(0) = -1$$

$$\mathbf{f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}} \qquad \therefore f'''(0) = 2$$

$$\mathbf{= 2\,(1+x)^{-3}}$$

খেয়াল করো, এখনো কোনো ভালো প্যাটার্ন বোঝা যাচ্ছে না। আরেকটু আগাই—

$$f^{iv}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} \qquad \therefore f^{iv}(x) = -6$$

আসলে আমরা ফ্যাক্টরিয়ালগুলো পাচ্ছি। মানগুলো থেকে বোঝা যাচ্ছে একবার $(+)$ আর একবার $(-)$ আসবে। তার মানে

$$f'(0) = 0!, f''(0) = -1!, f'''(0) = +2!, f^{iv}(0) = -3! \ldots\ldots$$

চলো ম্যাকলরিনের ধারাতে বসাই,

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{0!}{1!}x + \frac{-1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

এখানেও $-1 < x < 1$ শর্ত প্রযোজ্য।

এটা ব্যবহার করে যেকোনো ln-এর মান বের করা যায়। ধরো, আমরা বের করতে চাই $\ln 0.2 = ?$

আগে এটাকে একটু সাজিয়ে নাও $0.2 = 1 - 0.8 = 1 + (-0.8)$

$$\therefore \ln(1 + (-0.8))$$

$$= (-0.8) - \frac{(-0.8)^2}{2} + \frac{(-0.8)^3}{3} - \frac{(-0.8)^4}{4} + \cdots$$

এখান থেকে $\ln 0.2$ বের করে ফেলা যাবে।

কিন্তু যার ln-এর মান বের করবে সে যদি 1-এর চেয়ে বড় হয় তখন? তখনো সম্ভব, তবে একটু বুদ্ধি করতে হবে। ধরো বের করতে চাই, $\ln 5 = ?$

$$\ln 5 = -\ln\frac{1}{5} = -\ln(0.2) = -\ln(1 - 0.8)$$

ব্যস! এবার ম্যাকলরিনের ধারা বসালেই মান পেয়ে যাবে।

উদাহরণ 8.4: ম্যাকলরিন ব্যবহার করে $\sin x$-এর ধারা বের করো।

ধরি, $f(x) = \sin x$	$\therefore f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{iv}(x) = \sin x$	$f^{iv}(0) = 0$

এটুকুর পরে বুঝে ফেলা যায় যে, আবার আগের জিনিস ফিরে আসছে। $f(0), f'(0), f''(0)$ ইত্যাদির মানগুলো $0, 1, 0, -1$ তারপর আবার $0, 1, 0, -1$ এমন করে আসতেই থাকবে।

তাহলে ম্যাকলরিনের ধারা থেকে পাওয়া যাবে,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\therefore \sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

খুব খেয়াল: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ যখন আমরা লিখি, সেটার প্রমাণ করা হয় মূল নিয়মে। সেই প্রমাণ আসে লিমিটের সূত্র থেকে যেখানে x রেডিয়ান কোণ হলে $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ব্যবহার করা হয়। এর মানে কী? মানে হলো, এই ধারায় x হবে রেডিয়ান। আর x-এর সব মানের জন্য এটা খাটে।

$\sin 5.2$-এর মান এখন আমরা বের করতে পারব।

$$\sin 5.2 = 5.2 - \frac{(5.2)^3}{3!} + \frac{(5.2)^5}{5!} - \frac{(5.2)^7}{7!} + \cdots$$

প্রথম কয়েক ঘর নিয়ে হিসাব করলেই যথেষ্ট কাছাকাছি মান পেয়ে যাবে।

ম্যাকলরিনের ধারা থেকে আমরা একইভাবে প্রমাণ করতে পারি,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

এটা অবশ্য ম্যাকলরিন ব্যবহার না করে আরেকটা বুদ্ধিতে বের করা যায়।

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

এই ধারাটার দুইপাশে x-এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করি। পাব,

$$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

এটাই $\cos x$-এর ধারা। কী দারুণ তাই না!

e^x, $\sin x$ আর $\cos x$-এর ধারাগুলো দেখে গণিতবিদ অয়লার একটা দারুণ কাজ করলেন। এদেরকে সাজিয়ে প্রমাণ করলেন-

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

তোমাদের যাদের জটিল সংখ্যার একক i সম্পর্কে ধারণা আছে, তারা চেষ্টা করে দেখতে পারো। এটা প্রমাণ করা খুব কঠিন না। যাহোক উপরের সমীকরণে $x = \pi$ বসালে আসে,

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

$$\text{বা,} \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

অনেকে বলে পৃথিবীর সুন্দরতম সমীকরণগুলোর একটা হলো এই সমীকরণ! কেনই বা বলবে না। e, i, π- কে নেই এখানে!

উদাহরণ 8.5: ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\tan^{-1} x$-এর ধারাটি বের করো।

$$f(x) = \tan^{-1} x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

একটু চালাকি করি এখানে। আমরা বের করেছিলাম—

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

দুইপাশে ডিফারেন্সিয়েট করলে পাব,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{4x^3}{4} + \cdots$$

বা, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$

এখানে x-এর জায়গায় x^2 হলে কী হবে বলো তো?

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

মূল অঙ্কে চলে যাই,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad \therefore f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2 + 4 \cdot 3\, x^2 - 6 \cdot 5\, x^4 + \cdots \qquad f'''(0) = -2$$

$$f^{iv}(x) = 4\cdot3\cdot2\cdot1 - 6\cdot5\cdot4\,x^2 + \cdots \quad \Big| \quad f^{iv}(0) = 4!$$

প্যাটার্নটা দেখো, একবার শূন্য আরেকবার অশূন্য। অশূন্যগুলোর ভেতরে একবার (+) আরেকবার (−)।

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\tan^{-1} x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2!}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 + \cdots$$

$$\tan^{1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

এটাও খুবই বিখ্যাত এক ধারা। এখানে x-এর মান 1 বসালে পাবে,

$$\tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

বা, $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$

বা, $\pi = 4(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots)$

এখান থেকে π-এর মান হিসাব করে ফেলা যায়। তবে সত্যি কথা হলো, π-এর মান বের করার জন্য এটা বেশি কাজের না। মান আসে ঠিকই, তবে খুব ধীরে!

এই ধারাটা প্রথম আবিষ্কার করেন ভারতীয় গণিতবিদ মাধব। পরে গ্রেগরি ও লিবনিজও আবার আবিষ্কার করেন। তাদের সবাইকে সম্মান দিয়ে ধারাটিকে এখন বলে গ্রেগরি-লিবনিজ-মাধবের ধারা।

অধ্যায় ৯

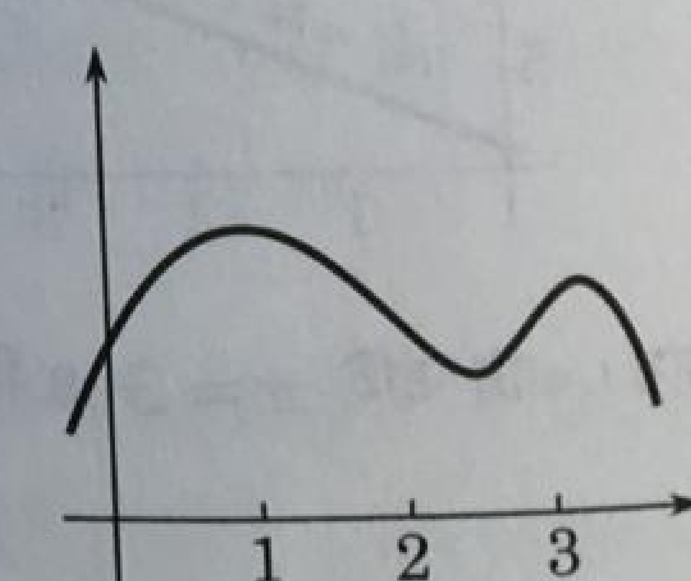
অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা

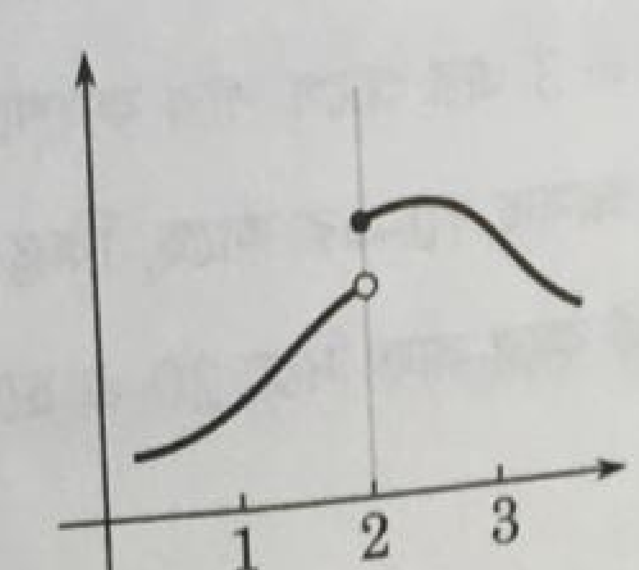
(Continuity & Differentiability)

৯.১ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা (CONTINUITY):

সংজ্ঞা: একটি ফাংশন f কোনো একটি বিন্দু a-তে অবিচ্ছিন্ন হবে যদি, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়।

মূল ধারণাটা জানলে সংজ্ঞাটা বোঝা সহজ। কোনো একটা বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন মানে হলো সেই বিন্দুতে কোনো ছেদ পড়েনি। নিচের দুইটি ছবির দিকে তাকানো যাক।



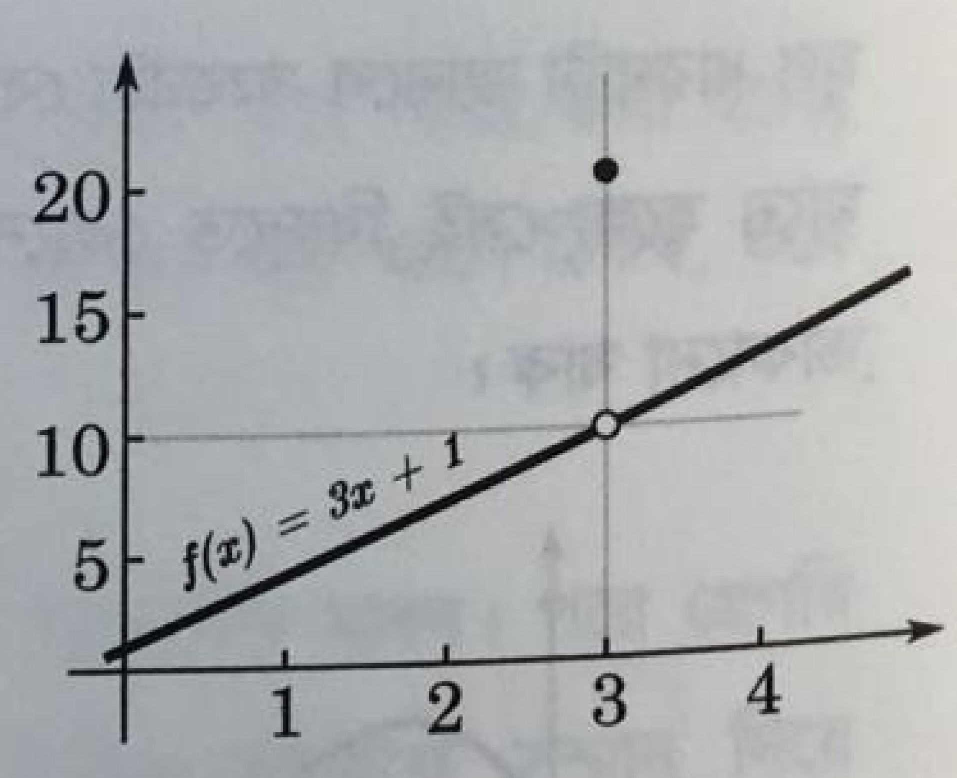


বামের ছবিটাতে যতদূর দেখা যায় কোনো ছেদ পড়েনি। ডানের ছবিতে $x = 2$-এ ফাংশনটি আচমকা অন্য জায়গায় চলে গেছে। একই দাগ বরাবর দুইটা মান থাকলে দেখতে হয় কোথায় গোল্লা খালি আর কোথায় ভরাট। যেখানে ভরাট করা সেটাই ঐ ফাংশনের মান। প্রথমটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন আর দ্বিতীয়টি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। খেয়াল করো বিচ্ছিন্ন ফাংশনটি $x = 3$ বিন্দুতে কিন্তু অবিচ্ছিন্ন। অর্থাৎ কোন বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা করছি, সেটাও জরুরি। এখন দেখো সংজ্ঞাটা এমন হলো কেন?

দেখো এটা আসলে খুব সুন্দর কথা। প্রথমত সংজ্ঞাটা নিশ্চিত করছে a বিন্দুতে ফাংশনটাকে সংজ্ঞায়িত হতে হবে (নইলে $f(a)$ পাওয়া যেত না)। এটি নিশ্চিত করছে দুদিক থেকেই ফাংশনটির লিমিট থাকবে। লিমিটের মানটা দুই দিক থেকে ওই ফাংশনাল ভ্যালুতে অগ্রসর হচ্ছে। এমন হবে না যে লিমিট দিয়ে মান পাওয়া যাচ্ছে কিন্তু ফাংশনের মান আছে অন্য জায়গায়। এটা কী বললেন, এমন আবার হয় নাকি? হতেই পারে!

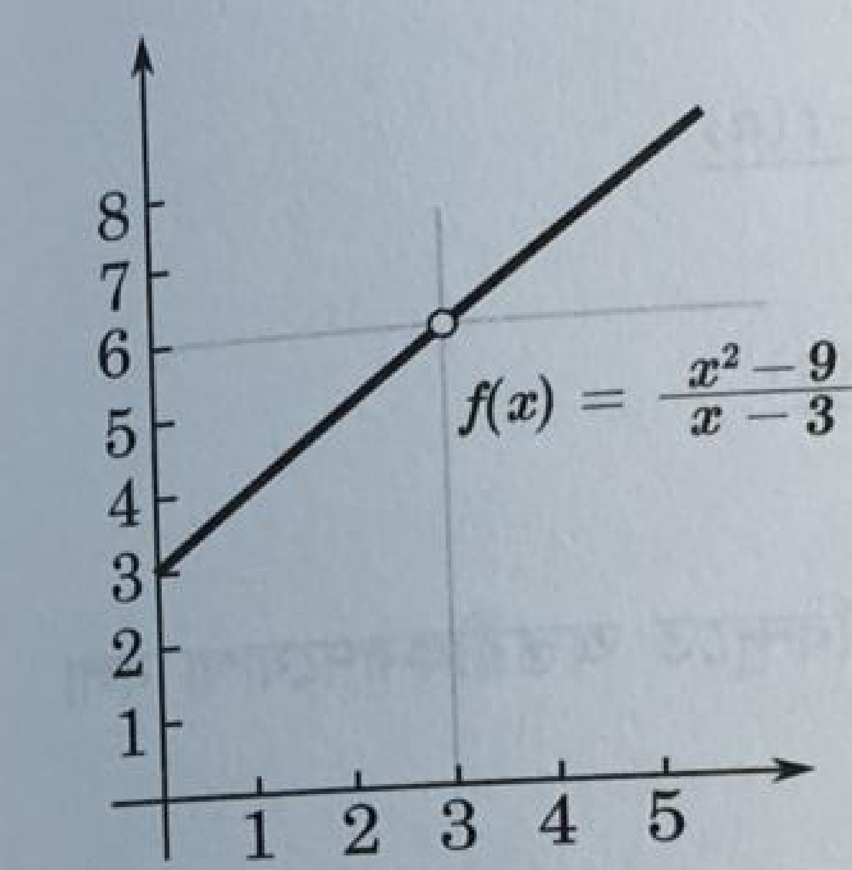
উদাহরণ 9.1: নিচের ফাংশনটা কি $x = 3$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন?

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \neq 3 \\ 20, & x = 3 \end{cases}$$



এমন করে একটা ফাংশনকে সংজ্ঞায়িত করা হলে সেটা 3 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হয়ে যেতে পারে। $3x + 1$ থেকে আমরা দেখি, $x = 3$ এর আগে-পরে ফাংশনের মানগুলো আসত 10-এর কাছে, কিন্তু 3-এ গিয়ে হুট করে লাফ দিয়ে 20-এ চলে যায়। এটা তাই $x = 3$ এ বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 9.2: লিমিট শেখানোর সময় যে উদাহরণ দিয়েছিলাম, সেই $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ এর কথাও ভাবতে পারো। এটাও $x = 3$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। কারণ যদিও $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$ পাওয়া যায়, $f(3)$-এর মান অসংজ্ঞায়িত।



৮.২ ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা (DIFFERENTIABILITY):

সংজ্ঞা: কোনো বিন্দু a তে একটি ফাংশন ডিফারেন্সিয়েবল বা অন্তরীকরণযোগ্য হবে যদি ওই বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরকের অস্তিত্ব থাকে।

কথাটা একটু কেমন যেন। এটি বলছে যদি অন্তরীকরণ করা যায় তাহলেই অন্তরীকরণযোগ্য। কেমন মাছের তেলে মাছ ভাজা হয়ে গেল, না?

এখানে একটা দর্শনের কথা বলি তোমাদের। কখনো যদি কোনো ব্যাপার বেশি স্পষ্ট লাগে তখন চিন্তা করতে হয়- এইরকমটা না হলে কী হতো কিংবা সবসময় কি এমন হবেই?

খেয়াল করো, aবিন্দুতে $f'(a)$-এর অস্তিত্ব থাকার আরেকটা অর্থ হলো $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ —এর অস্তিত্ব থাকা।

এখন এই লিমিটের অস্তিত্ব থাকার মানে হলো বামদিকবর্তী লিমিট আর ডানদিকবর্তী লিমিট দুটোরই অস্তিত্ব থাকা। এই দুটো লিমিটের দুটো আলাদা নাম দেয়া হয়েছে বামদিকবর্তী অন্তরজ (Left hand derivative) আর ডানদিকবর্তী অন্তরজ (Right hand derivative)।

তাহলে বামদিকবর্তী অন্তরজ= $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

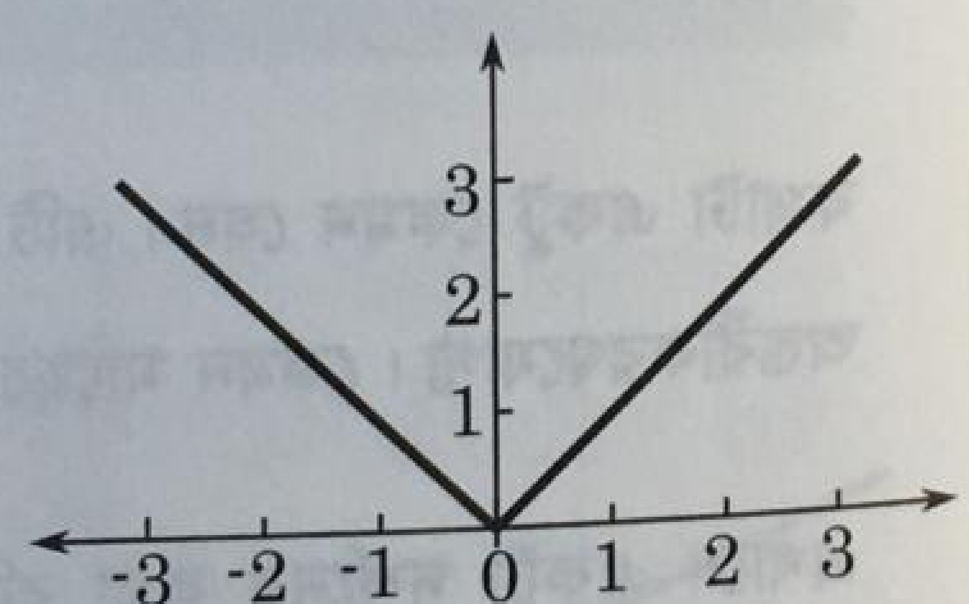
এবং ডানদিকবর্তী অন্তরজ= $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

এইদুটো অন্তরজ সমান হলে ফাংশনটাকে ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য বলা যাবে।

সোজা বাংলায় বললে, কোনো একটা বিন্দুর দিকে বামদিক থেকে দেখলে যে ঢাল হবে, আর ডানদিক থেকে দেখলে যে ঢাল পাওয়া যাবে, সেগুলো যদি সমান না হয় তখন ঐ বিন্দুতে ফাংশনটা অন্তরীকরণযোগ্য হবে না। যেমন চিন্তা করো, এই সমস্যাটার কথা—

উদাহরণ 9.3: $f(x) = |x|$ ফাংশনটি কি $x = 0$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য?

দেখো এই ফাংশনটার ছবি আসলে এমন-



যদি ফাংশনটা $f(x) = x$ হতো, তাহলে এটা হতো অভেদ ফাংশন যার ঢাল 1 আর মূলবিন্দুগামী। মডুলাস থাকার কারণে y-এর মান ঋণাত্মক হতে পারছে না। তাই Y অক্ষের বামপাশে যেখানে মান ছিল সেগুলো ধনাত্মক হয়ে [illegible]

এমনিতেই লক্ষ করো 0-এর ডানপাশে ঢাল ধনাত্মক আর বামদিকে ঢাল ঋণাত্মক। ফলে এখানে আমরা সন্দেহ করতে পারি, যে আসলে ঢালের অস্তিত্ব নেই। এসো অঙ্ক করে সেটা প্রমাণ করি।

$x = 0$ বিন্দুতে ঢালের ডানদিকবর্তী লিমিট

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \ [\text{যখন } h > 0, |h| = h]$$

$\therefore$ আমরা পাচ্ছি ডানদিকবর্তী ঢাল $= \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$

ঠিক যেমনটা আমরা ভেবেছিলাম।

একইভাবে ঐ বিন্দুতে ঢালের বামদিকবর্তী লিমিট $= \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$$

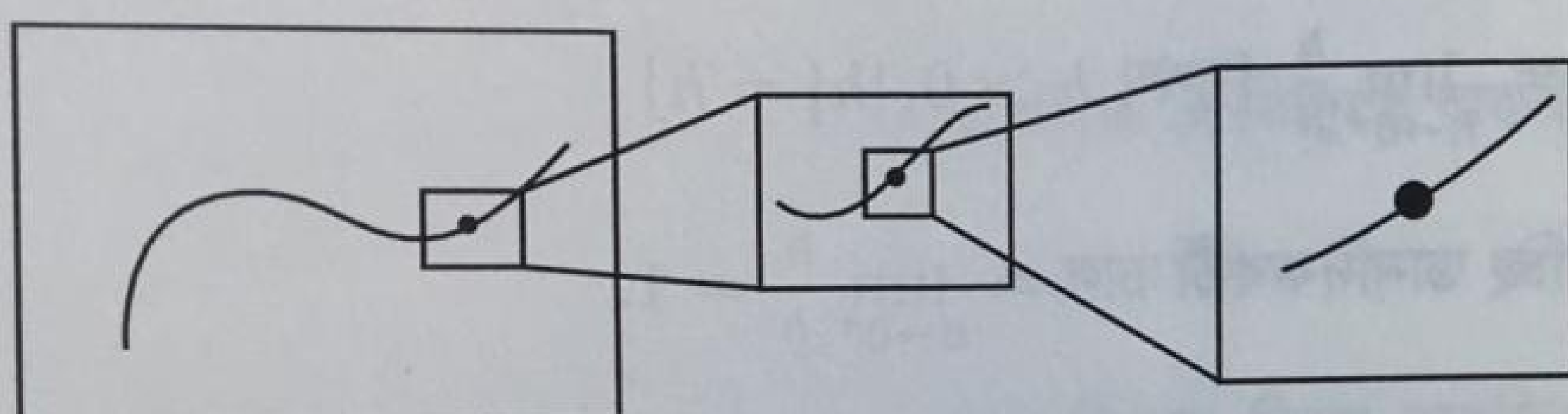
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \ [\because h < 0 \text{ হলে } |h| = -h]$$

$$= -1$$

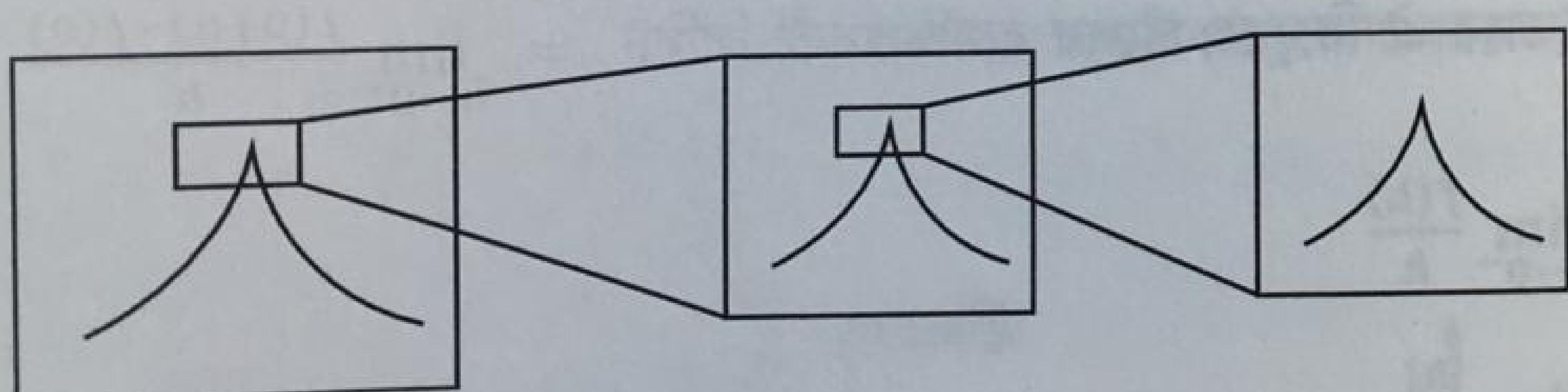
দুইপাশে দুইরকম মান। তার মানে এই লিমিটের অস্তিত্ব নেই। ফলে ঢালও পাওয়া যাচ্ছে না।

এখানে খেয়াল করো, গ্রাফটা দেখতে ছিল V-এর মতো। V-এর যে চোখা জায়গাটা সেটা ছিল $x = 0$ বিন্দুতে। এমন করে যদি কোনো বিন্দুতে ফাংশন চোখা হয়ে যায় বা সাধু বাংলায় বললে যদি তীক্ষ্ণ মোড় নেয় তাহলে সেখানে ফাংশনটা ডিফারেন্সিয়েবল হয় না।

ফাংশন যদি কোনো বিন্দুতে ডিফারেন্সিয়েবল বা অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তাহলে তুমি সেই বিন্দুতে বড় করে দেখতে থাকলে মানে জুম (zoom) করতে থাকলে একসময় সরলরেখার মতো দেখা যাবে।



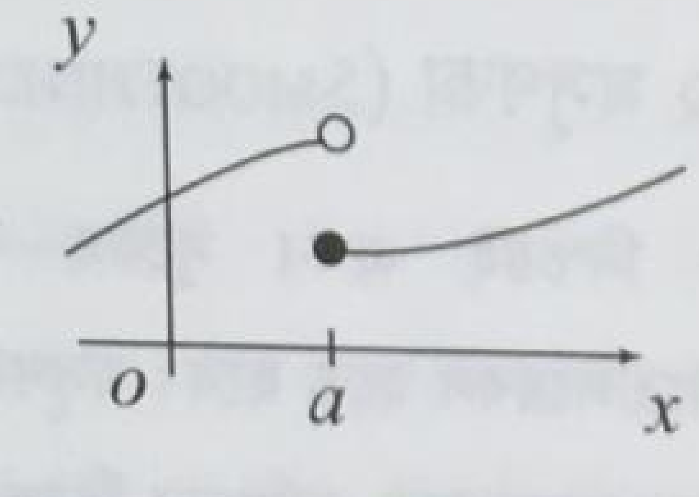
যদি তীক্ষ্ণ কোনা থাকে, যতই জুম করো ওই কোনা থেকে মুক্তি মিলবে না।



একটা ফাংশন আরও দুইভাবে ব্যর্থ হতে পারে অন্তরীকরণযোগ্য হওয়ার ব্যাপারে।

ফাংশন যদি ওই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়:

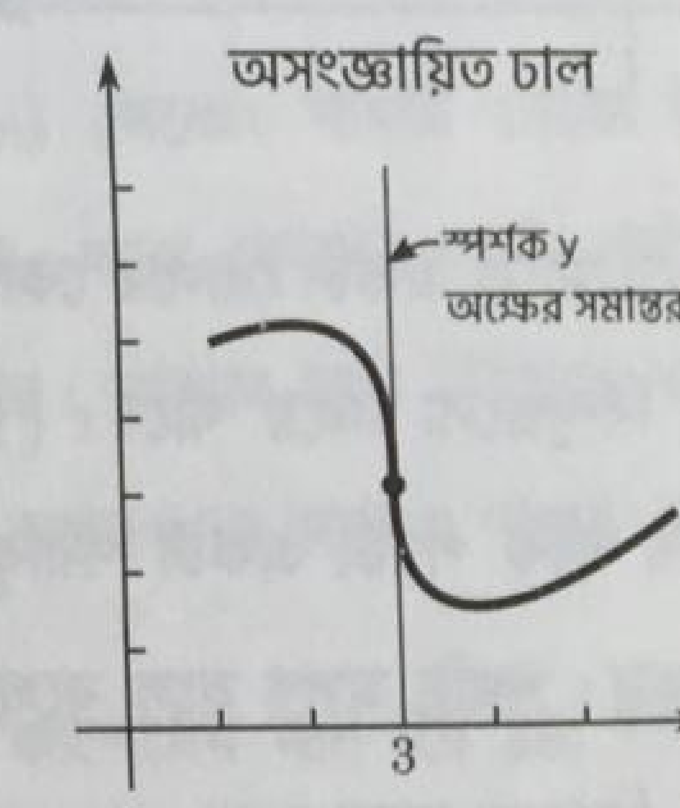
অবিচ্ছিন্ন হলে ঢালের লিমিট আর বের করা যায় না।



মনে রেখো: ফাংশন কোনো বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য হলে সেটা অবিচ্ছিন্ন হবেই। কিন্তু অবিচ্ছিন্ন হলেই অন্তরীকরণযোগ্য হবে এমন কোনো কথা নেই।

তৃতীয় ক্ষেত্রটা বেশ চিন্তার: ফাংশন কোনো বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য হবে না, যদি ওই বিন্দুতে যদি একটা উল্লম্ব স্পর্শক রেখা থাকে। মনে আছে কি, আমি বলেছিলাম চার রকম ঢালের কথা? ধনাত্মক, ঋণাত্মক, শূন্য আর অসংজ্ঞায়িত? এখানে সেই অসংজ্ঞায়িত ঢালের ব্যাপার চলে আসছে। যখন স্পর্শক হয়ে যায় Y অক্ষের সমান্তরাল তখন ঢাল কত আর বলা যায় না। ফলে ফাংশনটা সেখানে অন্তরীকরণযোগ্য বা ডিফারেন্সিয়েবল থাকে না।

ছবিতে $x = 3$ তে ফাংশনটির স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল, তাই ঢাল অসংজ্ঞায়িত। ফলে ওখানে ফাংশনটা অন্তরীকরণযোগ্য নয়।



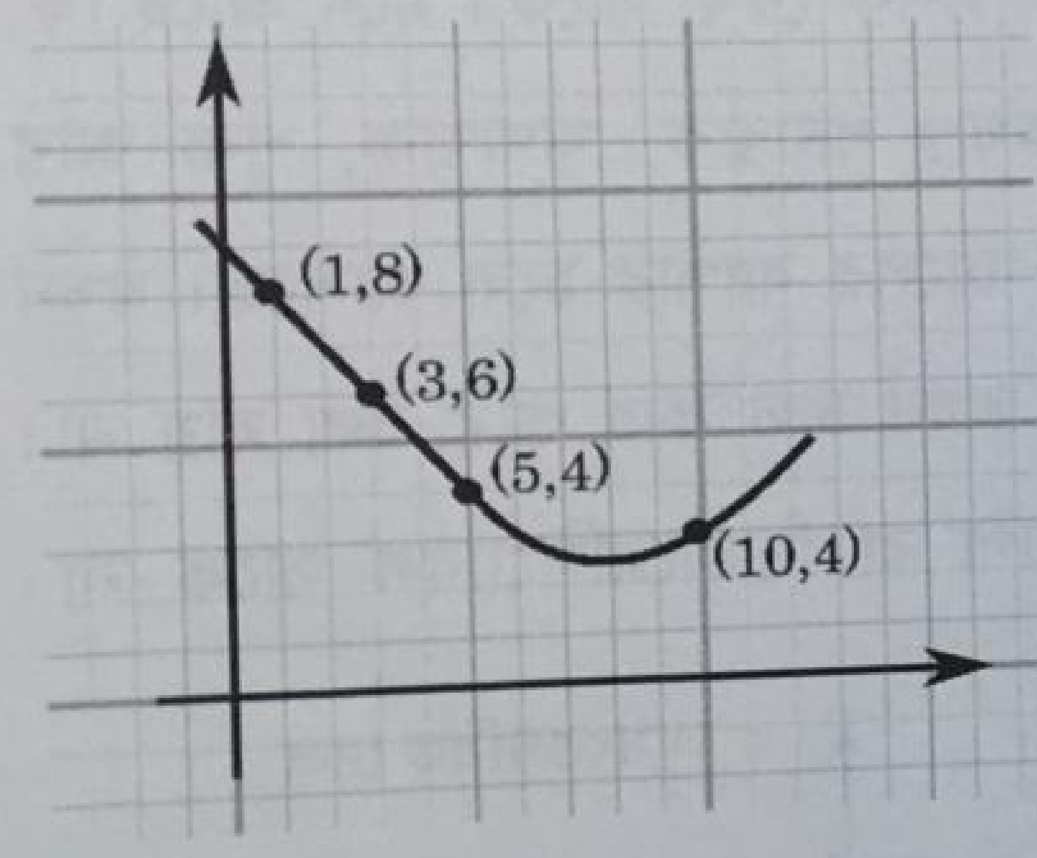
অর্থাৎ, তিনভাবে একটা ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হওয়ার পরীক্ষায় ফেল করতে পারে।

i. ওই বিন্দুতে তীক্ষ্ণ কোনা থাকলে
ii. ওই বিন্দুতে ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হলে
iii. ওই বিন্দতে উল্লম্ব স্পর্শকরেখা থাকলে

৯.২ মসৃণতা (Smoothness):

এটা নিশ্চয়ই এখন বুঝেছ—একটা ফাংশনকে মসৃণ হতে গেলে ডিফারেন্সিয়েবল হতে হবে। মসৃণতার একটা কঠিন গাণিতিক রূপও আছে। যে ফাংশনকে যত বেশিবার ডিফারেন্সিয়েট করা যাবে সে তত উচ্চ শ্রেণির মসৃণ! এই আলোচনা আমাদের এই বইয়ের আয়ত্তের বাইরে রাখছি। তবে একটা মজার সমস্যা ভাবতে পারো এখন।

সমস্যা ৯.১: রোলার কোস্টার নকশা করো!



ধরো তোমাকে একটা রোলার কোস্টারের পথের নকশা করতে হবে, যেগুলো ছবির বিন্দুগুলো দিয়ে যাবে। (1,8) থেকে (5,2) পর্যন্ত সরলরেখা আর তারপর বাকি পথটা একটা পরাবৃত্ত যাকে $(ax^2 + bx + c)$ দিয়ে প্রকাশ করা যায়। পথটা মসৃণ হলে বলো দেখি a, b, c এর মান কত? [চিন্তাসূত্র: (5,2) বিন্দুতে মসৃণ হতে গেলে তার ঠিক বামপাশের আর ঠিক ডানপাশের ঢাল সমান হতে হবে।]

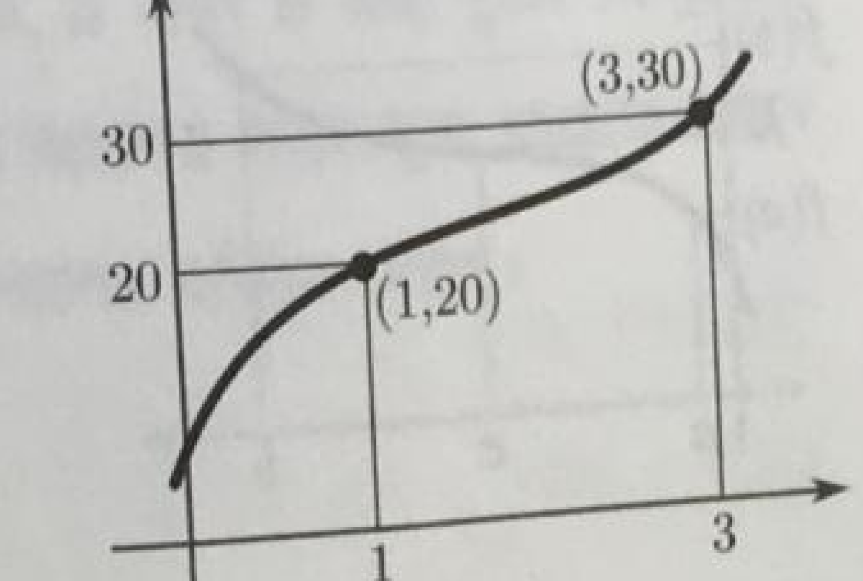
অধ্যায় ১০

কয়েকটি জরুরি উপপাদ্য

১০.১ মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য

অবিচ্ছিন্ন ফাংশনগুলোর একটা দারুণ বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায় মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (Intermediate Value Theorem) থেকে। নামটা থেকে ইঙ্গিত পাওয়া যায় এটা আসলে কী বলতে চাইছে। ধরো, কোনো একটা ফাংশনের দুটো আউটপুটের মান তোমার জানা আছে। তাহলে তুমি নিশ্চিন্তে থাকতে পারো যে, ঐ দুটোর মাঝের সবগুলো মান কখনও না কখনও পাওয়া যাবেই।

যেমন- ধরা যাক x=1 এর জন্য একটা ফাংশনের মান হয় 20, আর x=3 এর জন্য মান হয় 30। তাহলে এই উপপাদ্য বলে 20 থেকে 30 এর মাঝের যেকোনো মান (যেমন: 26.2, 21.353535... এমন যেকোনো মান)

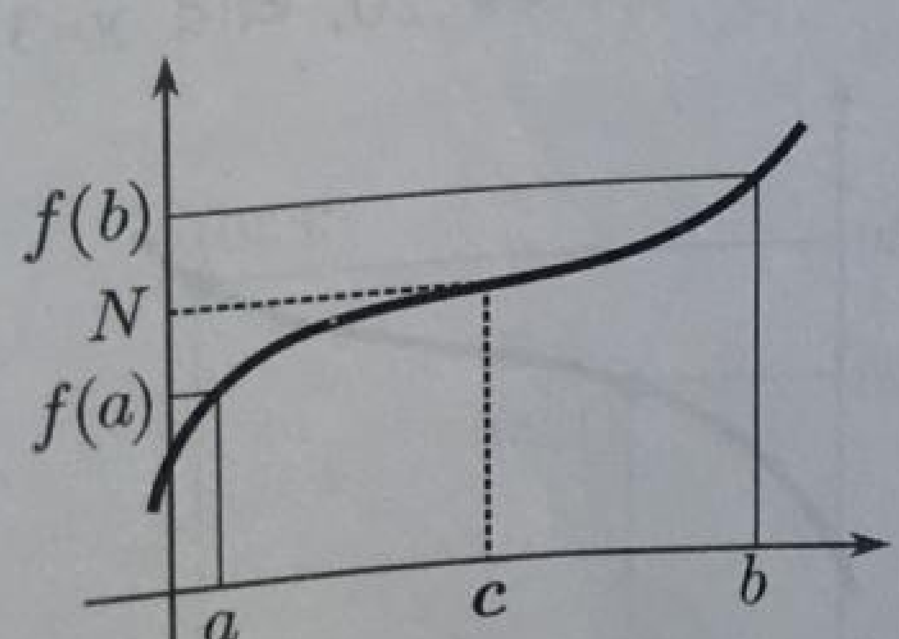


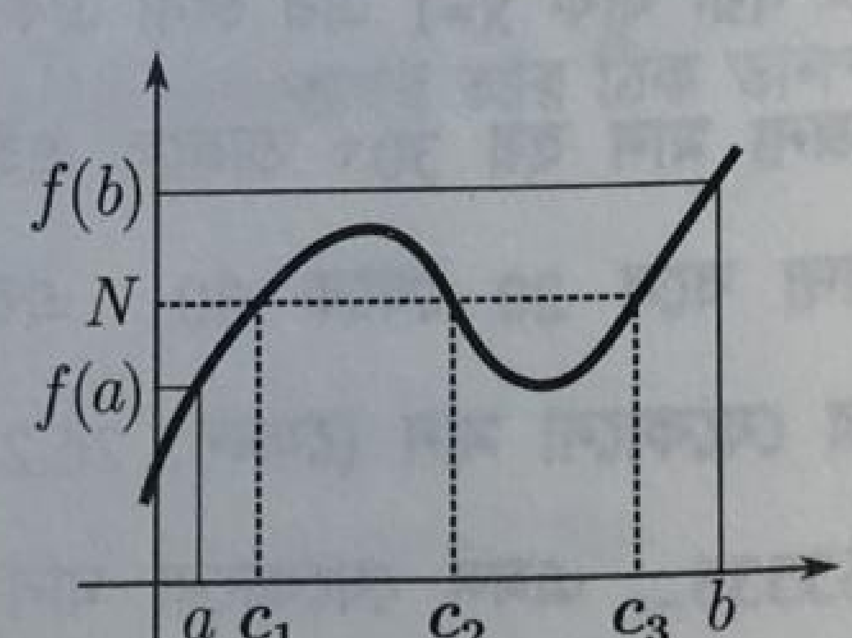
এই ফাংশন থেকে পাওয়া যাবে। এবং আরও ভালো ব্যাপার হলো সেই মানগুলো পাওয়া যাবে যখন x এর মান 1 থেকে 3 এর ভেতর। তবে জরুরি কথা হলো, ফাংশনটা এই ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হতে হবে। এটা এমনিতেই বোঝা যায়। যদি মাঝখানে ছেদ থাকে, তাহলে সবগুলো মান পাবেই সেটা আর কেউ নিশ্চিত করতে পারে না।

এবার চলো উপপাদ্যটার গাণিতিক বিবৃতি পড়ি।

উপপাদ্য 10.1: ধরা যাক, কোনো ফাংশন f একটি বদ্ধ ব্যবধি $[a, b]$-এর সব বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। N একটি বাস্তব সংখ্যা, যেটি $f(a)$ এবং $f(b)$-এর মধ্যে অবস্থিত, যেখানে $f(a) \neq f(b)$। তাহলে খোলা ব্যবধি (a, b)-এর ভেতরে নিশ্চয়ই একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে যেখানে $f(c) = N$ হবে।

$[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধি মানে কী জানা আছে তো? এর মানে হলো a আর b এই দুটো সংখ্যা এবং এদের মাঝখানের সব সংখ্যার সেট। a আর b এরা নিজেও ওই সেটের সদস্য। আরেকটা আছে খোলা ব্যবধি (a, b), সেখানে a আর b -এদের মাঝখানের সব সংখ্যা আছে, কিন্তু a, b নিজে নেই। (2,3) মানে হলো 2 এর চেয়ে বড়, আর 3 এর চেয়ে ছোট সব সংখ্যার সেট। 2, 3 নিজে ঐ খোলা ব্যবধিতে নেই।



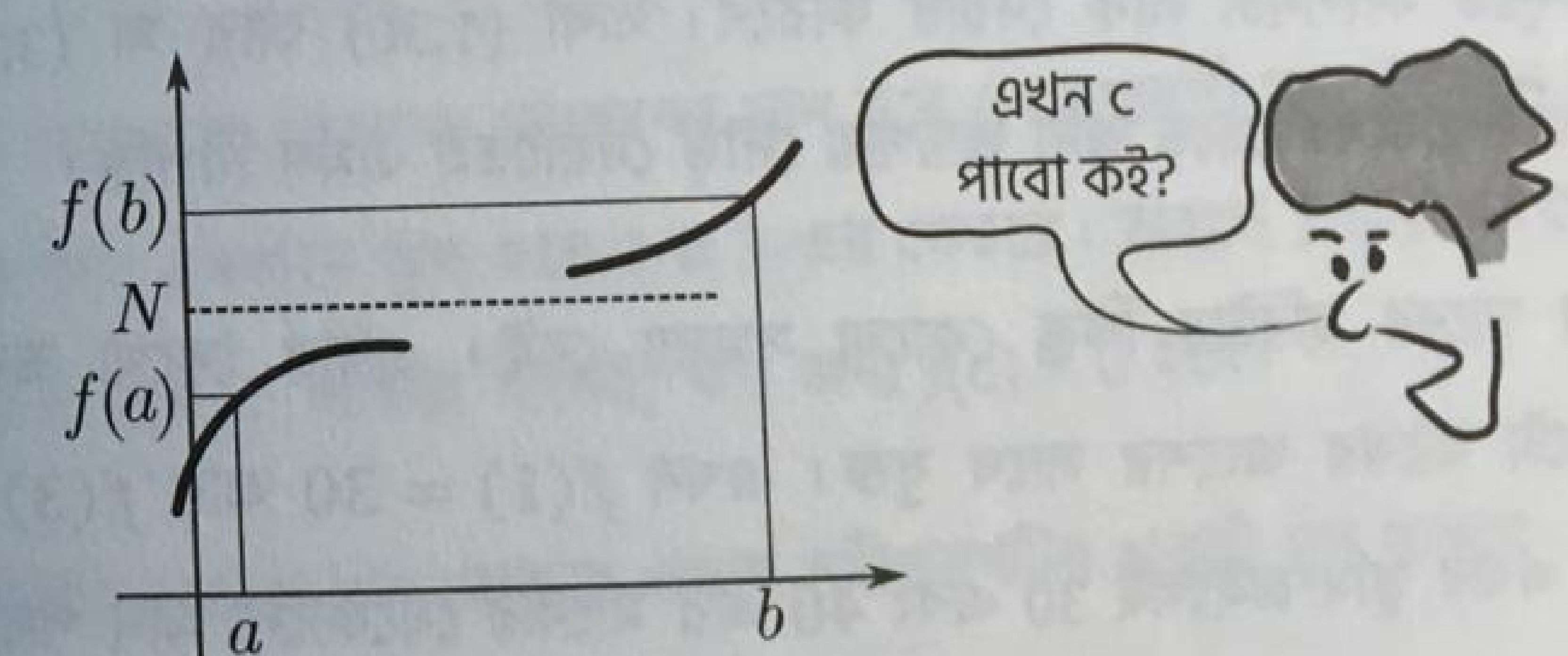


বামের ছবিতে দেখো $f(a) \neq f(b)$ এদের মাঝে আছে N। যেহেতু N সংখ্যাটা $f(a)$ আর $f(b)$ এর মধ্যে অবস্থিত, তাহলে ফাংশনের ছবিটার উপর অন্তত একটা বিন্দু পাওয়া যাবেই, যেখানে কোটির মান N। এবং সেখানে যেই ভুজ c পাওয়া যাবে- সেটা হবে a থেকে b এর মধ্যে।

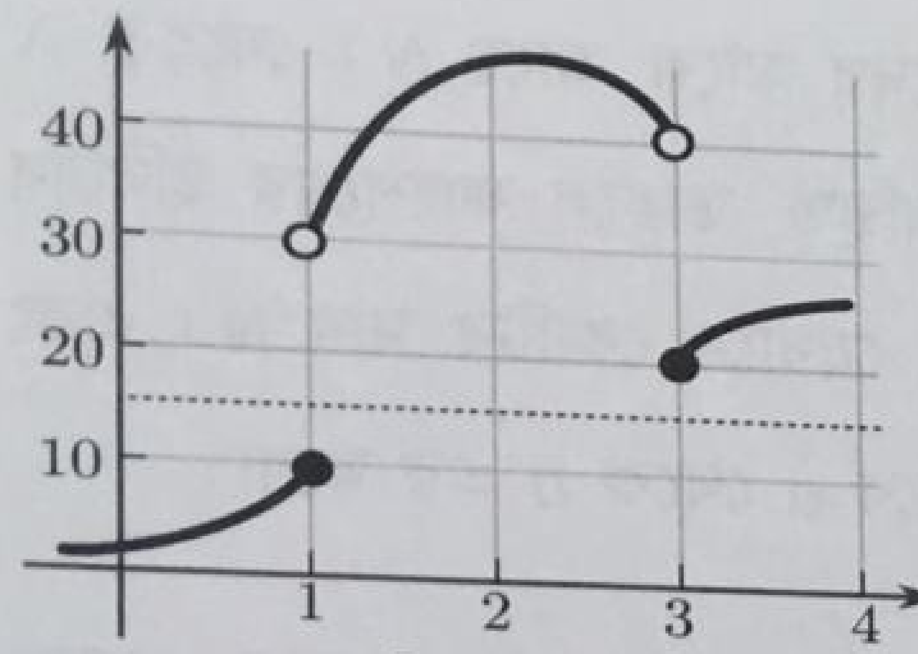
ফাংশনের মান N হয় এরকম একাধিক c ও পাওয়া যেতে পারে। যেমন ডানের ছবিতে দেখো c_1, c_2, c_3 এমন তিনটা ভুজ পাওয়া গেছে।

শর্তটার দিকে নজর দাও আরেকবার!

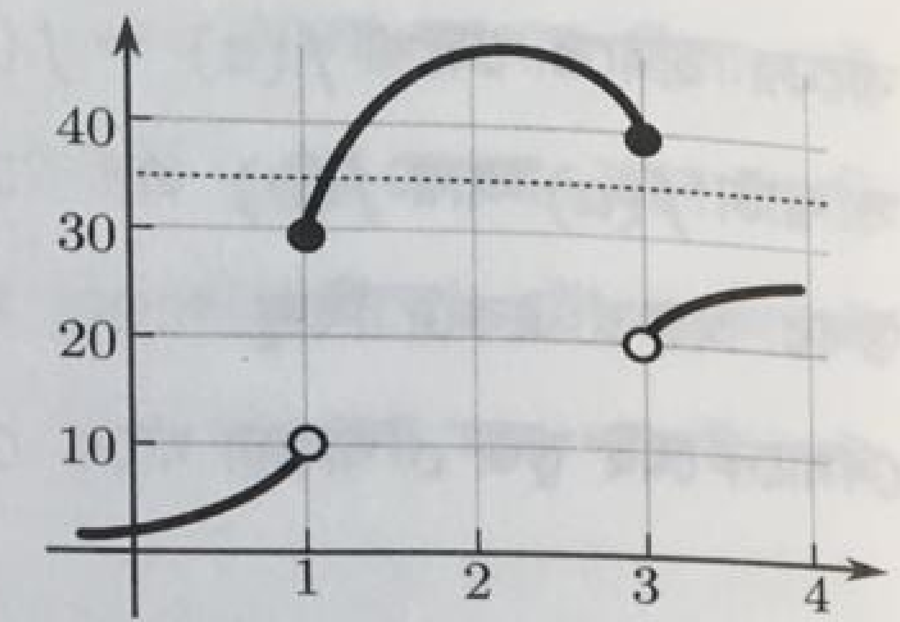
দেখো উপপাদ্যের শুরুতেই শর্ত দেয়া আছে, f ফাংশনটা $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হতে হবে। a থেকে b ভেতরে অবিচ্ছিন্ন হতে হবে, এটা সহজেই বোঝা যায়। এটা না হলে নিশ্চিত করা যায় না যে N-এর জন্য কোনো একটা c পাওয়া যাবেই। নিচের ছবিতে তাকালেই বুঝবে।



কিন্তু $[a, b]$ 'বদ্ধ' ব্যবধিতে কেন বলা হলো? বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হওয়া মানে হলো, শুধু মাঝের অংশটুকুতেই না, a এবং b এই দুটো বিন্দুতেও ফাংশনের মান থাকবে এবং সেটা মাঝের অংশের সাথে যুক্ত থাকতে হবে। না হলে কী বিপদ হয়, সেটা নিচের বামপাশের ছবিতে দেখো।



বদ্ধ ব্যবধির শর্ত মানে না, তাই মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য খাটে না



বদ্ধ ব্যবধির শর্ত মানে, তাই মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য খাটে

এখানে যখন ভুজের মান 1 থেকে 3 এর ভিতরে, তখন ফাংশনটা কিন্তু অবিচ্ছিন্ন, উপরে গম্বুজ আকৃতির অংশটার দিকে তাকাও। এবার দেখো, এখানে $f(1)$ এর মান কিন্তু 10 (যেখানে গোল্লাটা ভরাট করা আছে, সেটা হলো মান)। $f(3)$ এর মান হলো 20। তাহলে আমরা মনে করতে পারি যে 10 থেকে 20 এর ভিতরে ফাংশনের যেকোনো মান আমরা পাবো। আসলে কিন্তু এটা সত্যি না। আমরা কখনই 15 পাবো না। এমন কেন হলো? 1 ও 3 বিন্দুতে ফাংশনটা লাফ দেয়ার কারণে। বাবা (1,30) আর মা (3,40) মাঝের সন্তানদের ছেড়ে অন্য জায়গায় দৌড় দেয়াতেই এমন বিপত্তি।

উপরে ডানের ছবিটায় কিন্তু কোনো সমস্যা নেই। এবার দেখো ভরাট বিন্দুদুটো মাঝের অংশের সাথে যুক্ত। এখন $f(1) = 30$ আর $f(3) = 40$। এবার তুমি চাইলেই 30 এবং 40 এর মাঝের যেকোনো মান পাবে। এবারে বাবা-মা সাথে আছে, আর সমস্যা নাই। একারণেই শর্ততে বলা হয়েছে $[a, b]$ 'বদ্ধ' ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন থাকার কথা।

মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য এর প্রয়োগ:

উদাহরণ 10.1: দেখাও যে, x^3-$4x^2$+9x-10=0 সমীকরণটির একটা মূল আছে 1 থেকে 3-এর ভেতরে।

ধরি, $f(x) = x^3-4x^2+9x-10$

আগে বোঝো 'মূল' ব্যাপারটা কী। x এর যে মানের জন্য $f(x) = 0$ হয়ে যাবে, সেটা হলো মূল। কোনো ফাংশনের ছবি আঁকলে সেটা যেখানে x অক্ষকে ছেদ করে যায়, সেখানেই একটা মূল পাওয়া যায়। কারণ x অক্ষের উপর কোটি বা y হয় শূন্য।

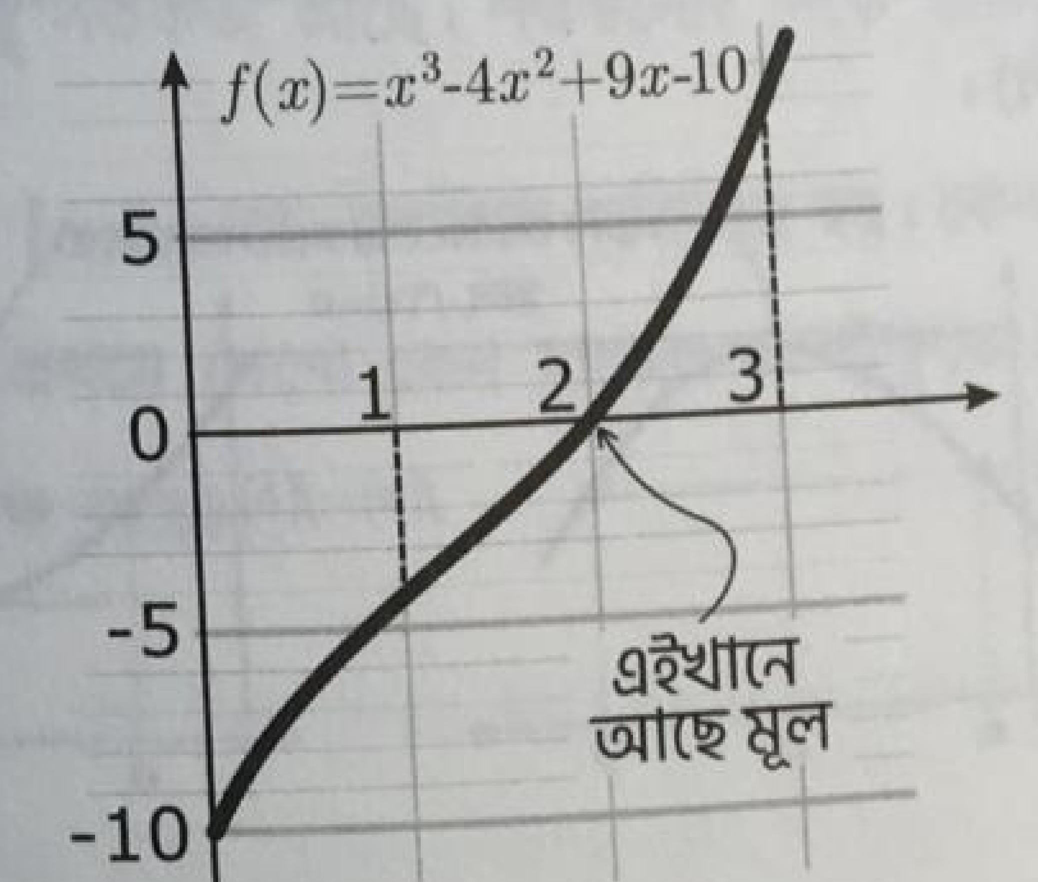
মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য ব্যবহারের জন্য এই ব্যাপারটাকেই আরেকটু গুছিয়ে বলি। সমীকরণের মূল খোঁজার মানে হলো একটা বিন্দু c পাওয়া যেন $f(c) = 0$ হয়। আমরা এখানে $a = 1$, $b = 3$ এবং $N = 0$ চিন্তা করি।

$f(1) = 1 - 4 + 9 - 10 = -4$

$f(3) = 27 - 36 + 27 - 10 = 8$

লক্ষ করো, -4 আর 8, এদের মাঝখানেই তো 0। তাহলে $f(1)$এবং $f(2)$-এর মাঝখানে কোথাও ফাংশনের মান হবে 0। মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য থেকে বলা যায়, সেখানে ভুজ হবে 1 ও 3-এর ভেতরে। তাহলে 1 ও 3-এর ভেতরে একটা মান, c পাওয়া যাবেই, যার জন্য $f(c) = 0$ হবে।

সুতরাং 1 ও 2-এর ভেতরে প্রদত্ত সমীকরণটির একটি মূল থাকবে।

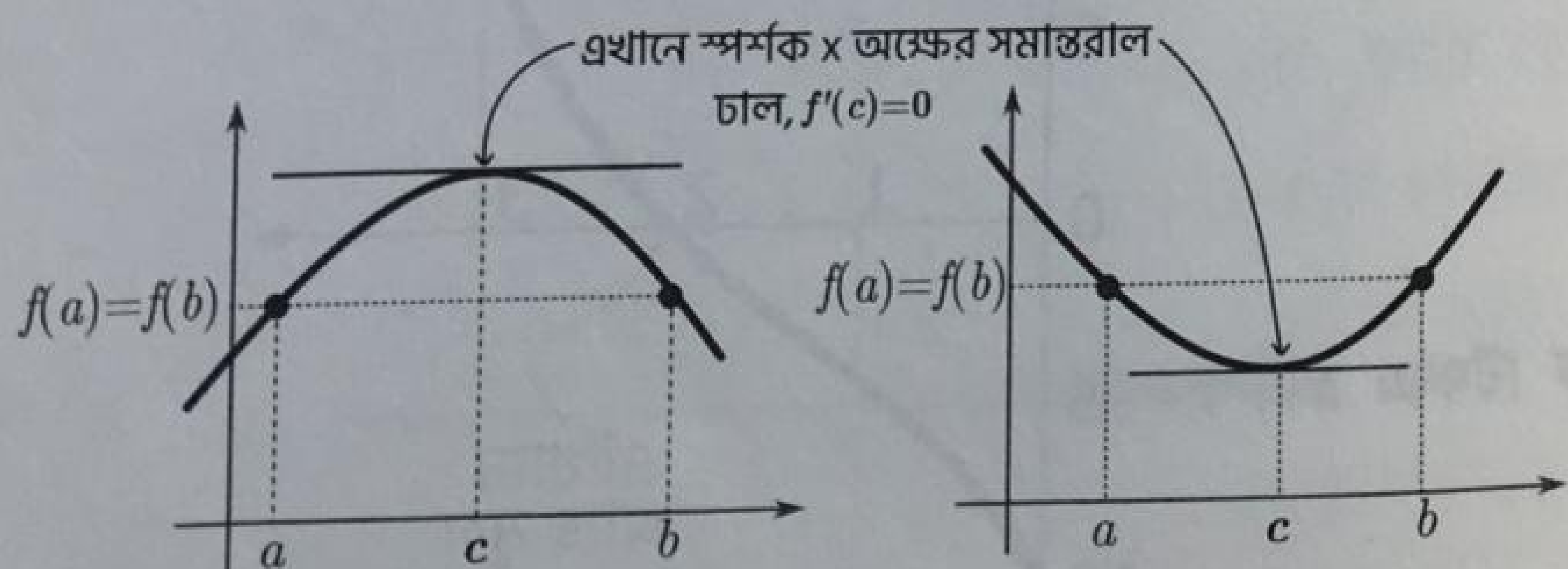


১০.২ রোলের উপপাদ্য (ROLLE'S THEOREM):

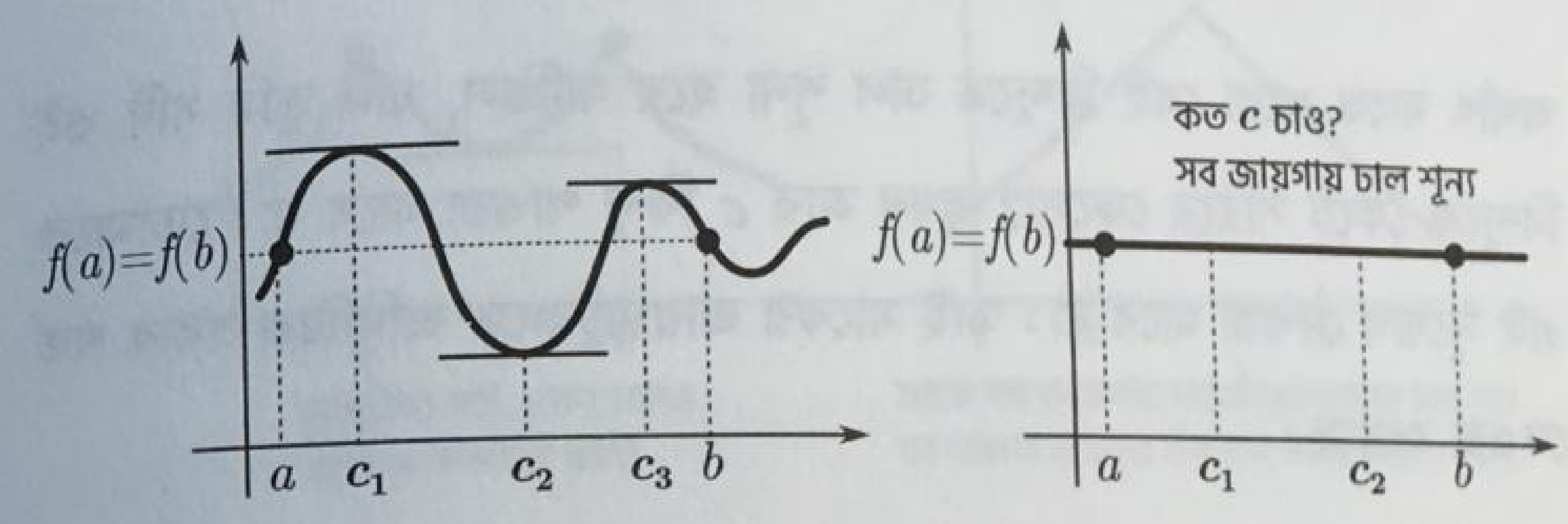
রোলের উপপাদ্যের মূল ভাবনাটা খুব সহজ। সরল বাংলায় বললে, দুটো বিন্দুতে কোনো 'সুন্দর' ফাংশনের মান যদি সমান হয়, তাহলে মাঝে কোথাও অন্তত একটা বিন্দুতে ঢাল হবে শূন্য বা স্পর্শক হবে x অক্ষের সমান্তরাল। গাণিতিক বিবৃতিটা বলি।

> **উপপাদ্য 10.2:** কোনো ফাংশন f যদি (i) $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয়, (ii) (a,b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয় এবং (iii) $f(a)=f(b)$ হয় তাহলে (a,b) ব্যবধিতে অন্তত একটা সংখ্যা c পাওয়া যাবে যেন $f'(c)=0$ হয়।

প্রথমে খেয়াল করো তৃতীয় শর্তের দিকে, $f(a)=f(b)$। দুটো বিন্দুতে যদি ফাংশনের মান সমান হয় তাহলে কী কী হতে পারে? এমন হতে পারে যে, মাঝে কোথাও একবার ফাংশনটা উঁচু হয়েছে। তাহলে যেখানে সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছেছে, সেখানে ঢাল হবে শূন্য, $f'(c)=0$ (নিচে বামপাশের ছবি)। আবার এমন হতে পারে যে, মাঝে কোথাও একবার ফাংশনটা নিচু হয়েছে। তাহলে যেখানে সর্বনিম্ন বিন্দুতে পৌঁছেছে, সেখানে ঢাল হবে শূন্য (নিচে ডানের ছবি)।



দেখো, $(a,f(a))$ এবং $(b,f(b))$ বিন্দুদুটোর মাঝে ফাংশনটা যে ঠিক একবারই উপরে উঠবে বা একবারই নিচে নামবে এমন কোনো কথা নেই। ফলে একাধিক বিন্দু পাওয়া যেতে পারে যেখানে ঢাল শূন্য, বা স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল। নিচের বামপাশের ছবিটাতে তাকাও।

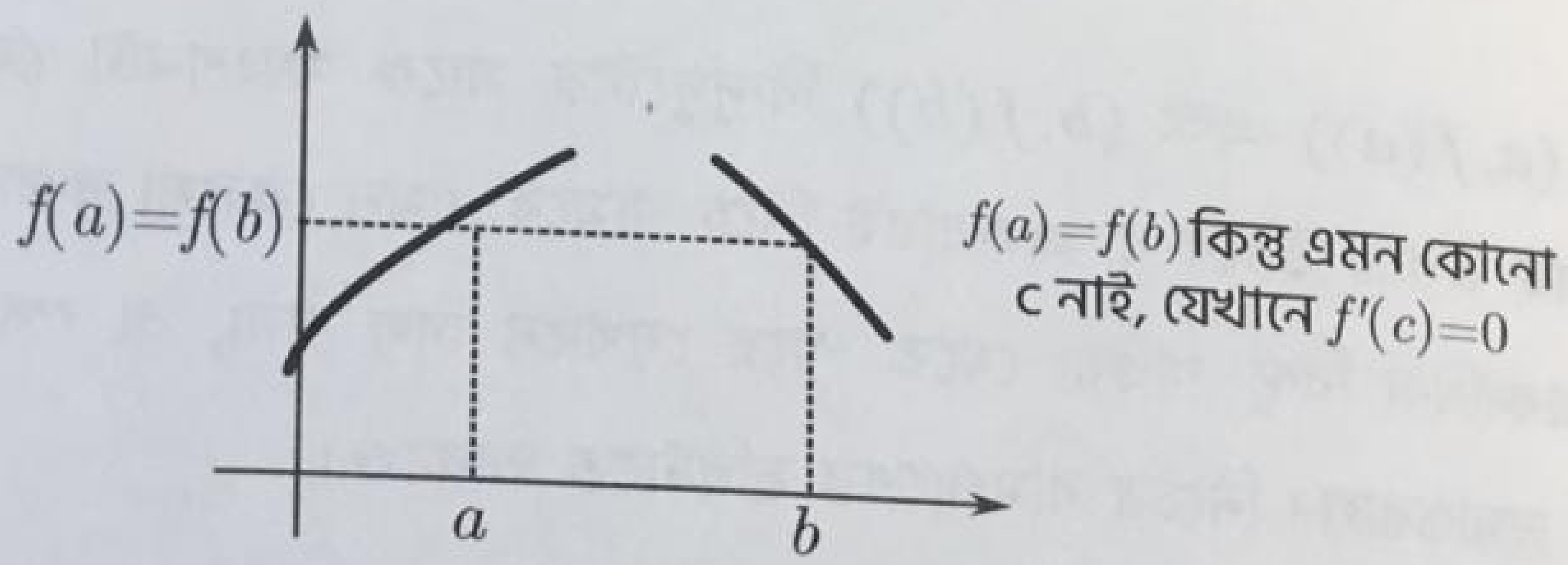


আরেকটা মজার ব্যাপার এখানে ঘটতে পারে। এমন হতে পারে যে, সব জায়গাতেই ফাংশনের মান একই (উপরে ডানের ছবি)। তাহলে পাওয়া যাবে একটা ধ্রুব ফাংশন। তখন সব জায়গায় ঢাল শূন্য হবে। একটা c পেলেই তুমি খুশি হয়ে যেতে। এখানে আছে অসীম সংখ্যক। কী মজা!

শর্তগুলোর দিকে নজর দাও আরেকবার!

এমনিতে ভাবো—মনে হয় এ আর এমন কী! একটা ফাংশন হয় সোজা চলে যাবে, নয় ওঠানামা করবে। এটাকে উপপাদ্য দিয়ে বলার কী আছে? কিন্তু আসলে এখানে কিছু সতর্কতা আছে। শর্তগুলোর দিকে তাকাই।

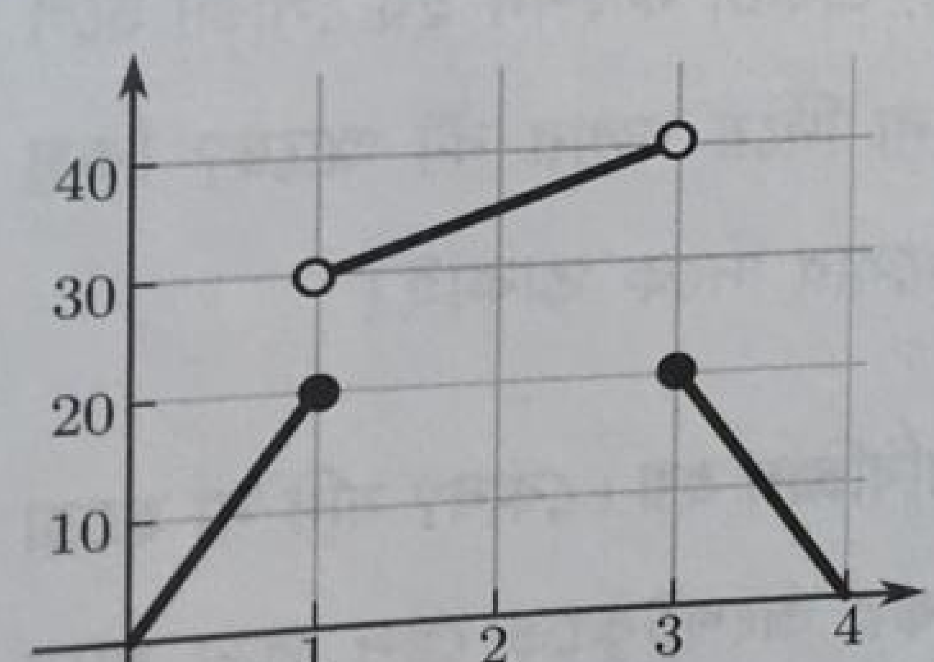
শর্ত ১: যদি $f(x)$, $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয়। কেন? যদি না হতো কী সমস্যা হতো? প্রথমে দেখো কেন মাঝের অংশটুকুতে ছেদ পড়া যাবে না। এই ছবিতে লক্ষ করো-



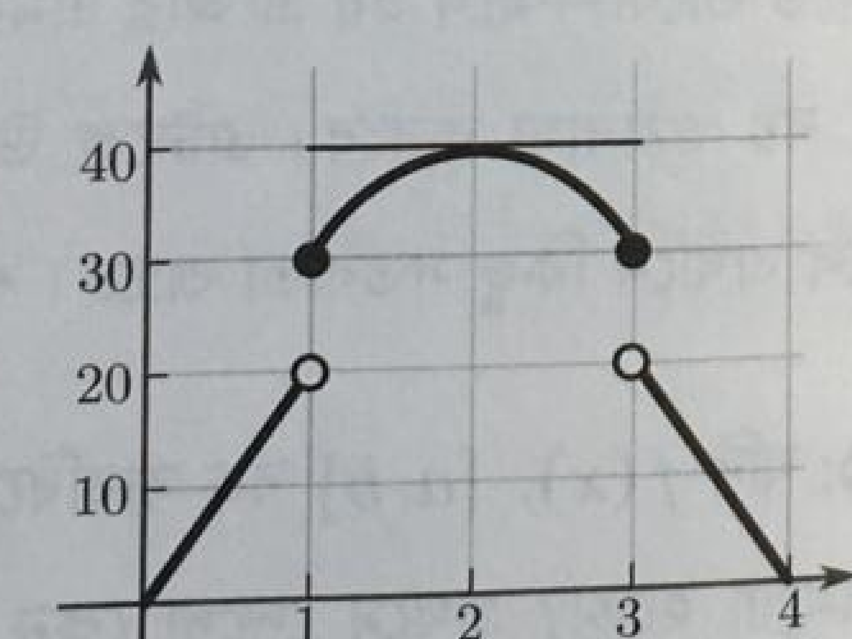
অর্থাৎ মাঝে ধরো যেই বিন্দুতে ঢাল শূন্য হয়ে যাচ্ছিল, যদি তুমি যদি ওই বিন্দুকে কেটে সরিয়ে ফেলো? তখন আর c বিন্দু পাওয়া যাবে না। তোমাকে এই সুযোগ দেওয়া যাবে না। তাই মাঝের জায়গাটুকুতে অবিচ্ছিন্ন হবার শর্ত দেওয়া হয়েছে।

আরেকটা ব্যাপার দেখো—বলা হয়েছে $[a,b]$ 'বদ্ধ' ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হতে হবে। অর্থাৎ, a বিন্দুতে এবং b বিন্দুতে ফাংশনের মান থাকবে এবং সেটা এদের মাঝের অংশটার সাথে জোড়া লাগানো থাকতে হবে। এটা কেন? এমন নাহলে কী হতো? ধরো একটা ফাংশন এমন—

$$f(x)=\begin{cases} 20x, & x\le 1 \\ 5x+25, & 1<x<3 \\ 80-20x, & x\ge 3 \end{cases}$$

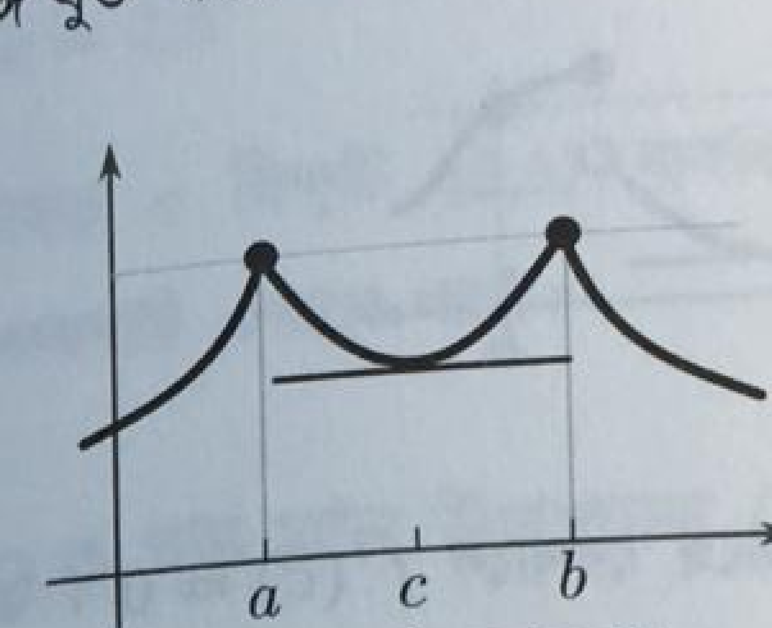


বদ্ধ ব্যবধির শর্ত মানে না, তাই রোলের উপপাদ্য খাটে না

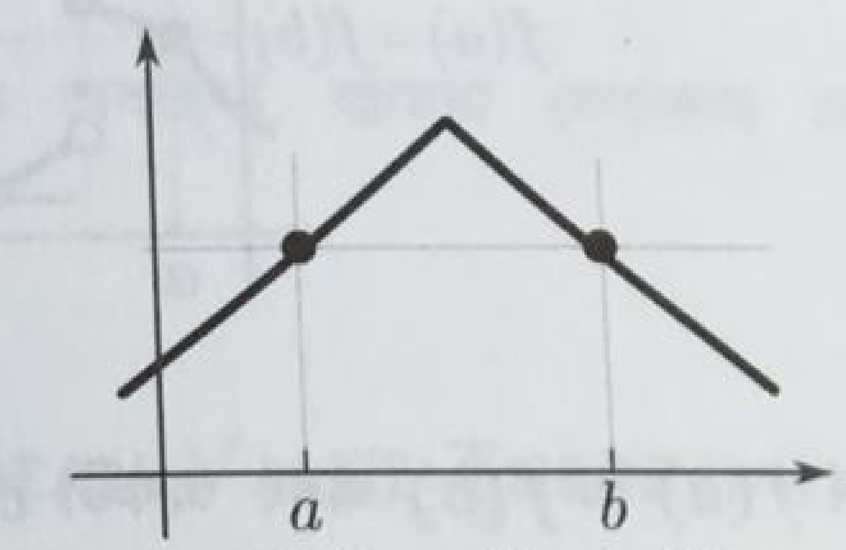


বদ্ধ ব্যবধির শর্ত মানে, তাই রোলের মান উপপাদ্য খাটে

এই ফাংশনে $f(1)$ আর $f(3)$ দুটোরই মান 20। কিন্তু দুটোর মাঝের জায়গায় কোথাও ঢাল শূন্য হয় না। ভরাট জায়গাটা যদি মাঝের অংশের সঙ্গে যুক্ত থাকে তখন আর এমন দুর্ঘটনা ঘটবে না (উপরে ডানের ছবি)।



অসুবিধা নাই, এমন হলেও রোলের উপপাদ্য খাটে



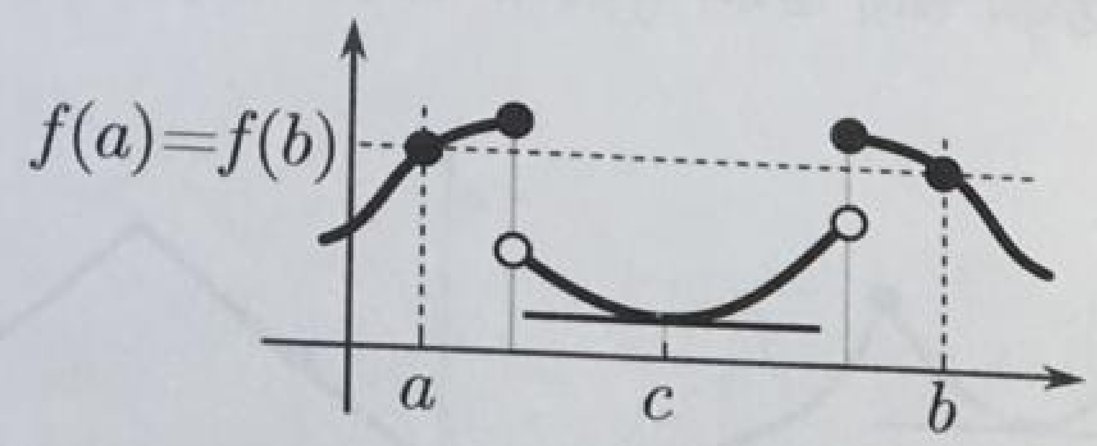
মাঝে সব জায়গায় অন্তরীকরণযোগ্য হতে হবে তা নাহলে রোলের উপপাদ্য না-ও খাটতে পারে

শর্ত ২: ফাংশনটিকে (a,b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হতে হবে। যেহেতু আমাদের c বিন্দুটা থাকবে (a,b)-এর মধ্যে, তাই a বিন্দু এবং b বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য হওয়া জরুরি না। যেমন উপরে বামের ছবিতে যদিও a বিন্দুতে বা b বিন্দুতে ফাংশনটা অন্তরীকরণযোগ্য নয় (চোখা অংশদুটোর দিকে নজর দাও), মাঝের অংশে রোলের উপপাদ্য খাটে এবং c পাওয়া যায়।

কিন্তু জরুরি কথা হলো মাঝের সবজায়গায় অন্তরীকরণযোগ্য হতে হবে। না হলে কী হবে? ডানের ছবিটায় তাকাও। ফাংশনটা মসৃণ হলে কোনো একজায়গায় গিয়ে ঢালটা শূন্য হয়ে তারপর নামতে হতো। অন্তরীকরণযোগ্য না হলে ধুম করে কোনো বিন্দু থেকে ঘুরে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকবে। তখন আর c বিন্দু খুঁজে পাওয়া যাবে না। তাহলে বুঝলে তো, শর্তগুলো কত জরুরি!

আরেকটা কথা: এই উপপাদ্যের উল্টোটা সত্যি না-ও হতে পারে। অর্থাৎ (a,b)-এর মাঝে যদি একটা c থাকে যেন $f'(c)=0$ হয়, এমন হলেই

বলা যায় না যে $f(x)$, (a,b)-এর মাঝে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $[a,b]$-এর মাঝে অবিচ্ছিন্ন।



এখানে $f(a) = f(b)$ এবং একটা c আছে যেখানে $f'(c) = 0$ । তার মানে এই না যে ফাংশনটা অবিচ্ছিন্ন বা অন্তরীকরণযোগ্য।

রোলের উপপাদ্যের ব্যবহার:

উদাহরণ 10.2: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ফাংশনটির $f(2) = 0$ এবং $f(3) = 0$ । রোলের উপপাদ্যটি (2,3) ব্যবধির মধ্যে যাচাই করো।

শুরুতেই দেখে নাও শর্তগুলো মানে কিনা!

$f(x)$ একটি বহুপদী ফাংশন যা সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন ও অন্তরীকরণযোগ্য। দেওয়া আছে, $f(2) = f(3)$। আমাদের দেখাতে হবে (2,3)-এর ভেতরে একটি c আছে যার জন্য $f'(c) = 0$.

দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$\therefore f'(x) = 2x - 5$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $f'(c) = 2c - 5$

আমরা দেখি কখন $f'(c) = 0$ হবে ।

$f'(c) = 0$

বা, $2c - 5 = 0$

$\therefore c = 2.5$

যেহেতু c বিন্দুটি (2,3) ব্যবধিতে অবস্থিত, আমরা দেখালাম রোলের উপপাদ্যটি এখানে খাটে।

১০.৩ গড় মান উপপাদ্য (Mean Value Theorem):

উপপাদ্য 10.3: কোনো ফাংশন f যদি (i) $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয়, (ii) (a,b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তাহলে (a,b) খোলা ব্যবধিতে একটি c থাকবে যেন $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ হয়।

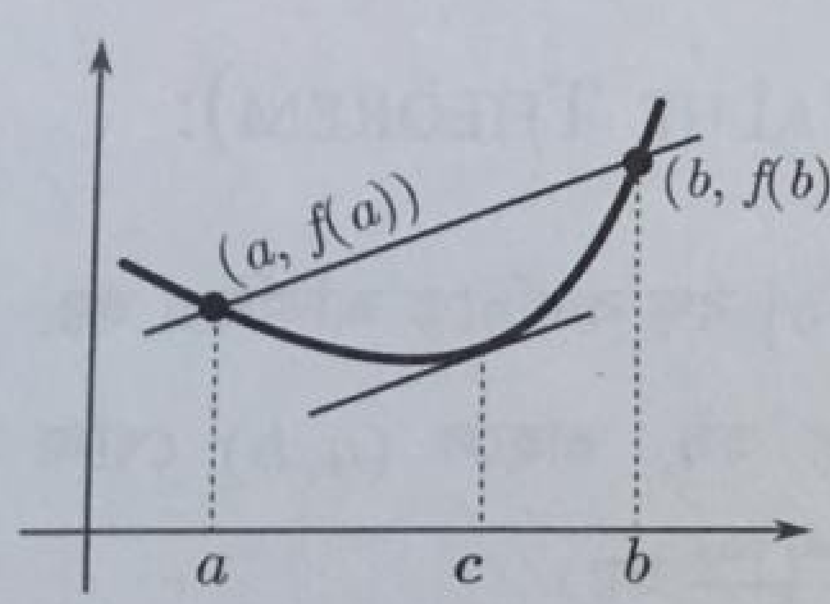
এটা দেখতে একটু কঠিন, কিন্তু জিনিস সহজ। এবার আর রোলের উপপাদ্যের মতো $f(a)$ আর $f(b)$ সমান হওয়া জরুরি না (হলেও অসুবিধা নাই)।

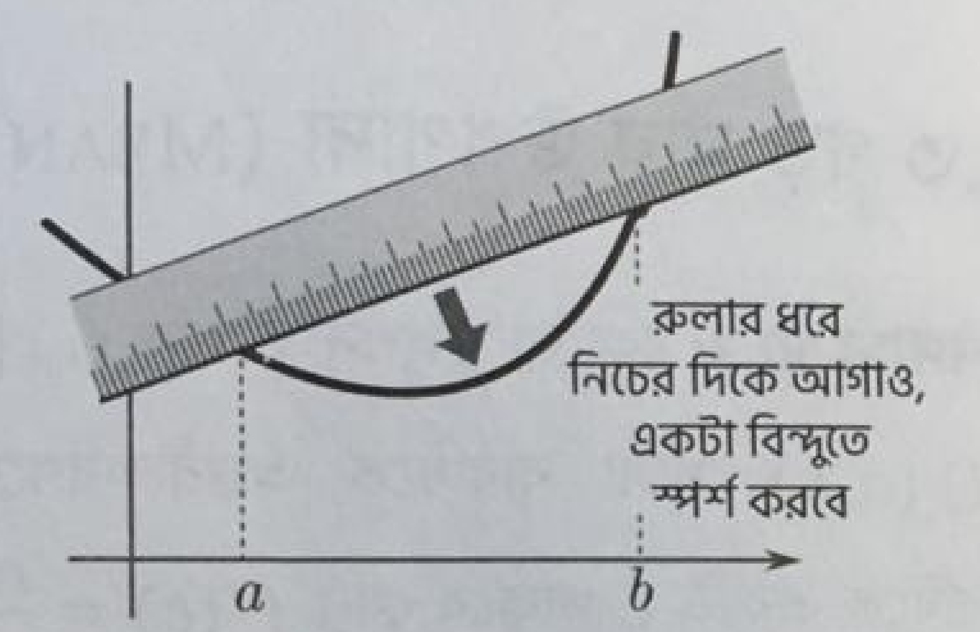
খেয়াল করো, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ আসলে কী বোঝায়? এটা বোঝায় $(a, f(a))$এবং $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল।

আর $f'(c)$ বোঝায় মাঝের কোনো একটা বিন্দু c তে স্পর্শকের ঢাল। তাহলে $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ মানে হলো, অন্তত একটা বিন্দু পাওয়া যাবেই যেখানে স্পর্শকটার ঢাল $(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$-এর সংযোগরেখার ঢালের সমান।

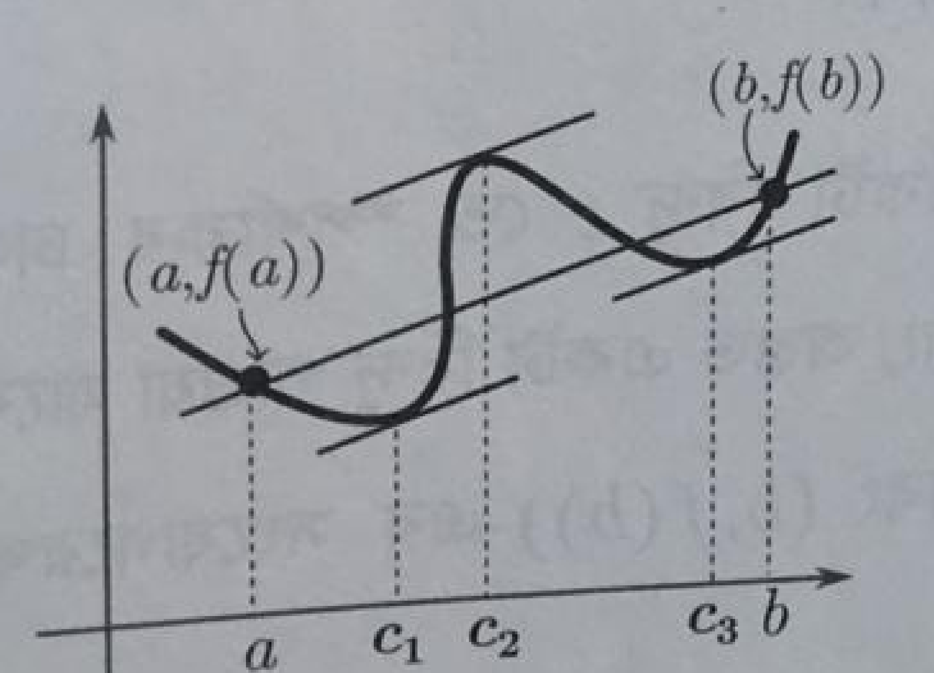
এই দুটো ঢাল সমান হওয়ার মানে হলো- হয় তারা একই রেখা আর না হয় তারা পরস্পর সমান্তরাল। মনে আছে তো, সমান্তরাল রেখার ঢাল হয় পরস্পর সমান!

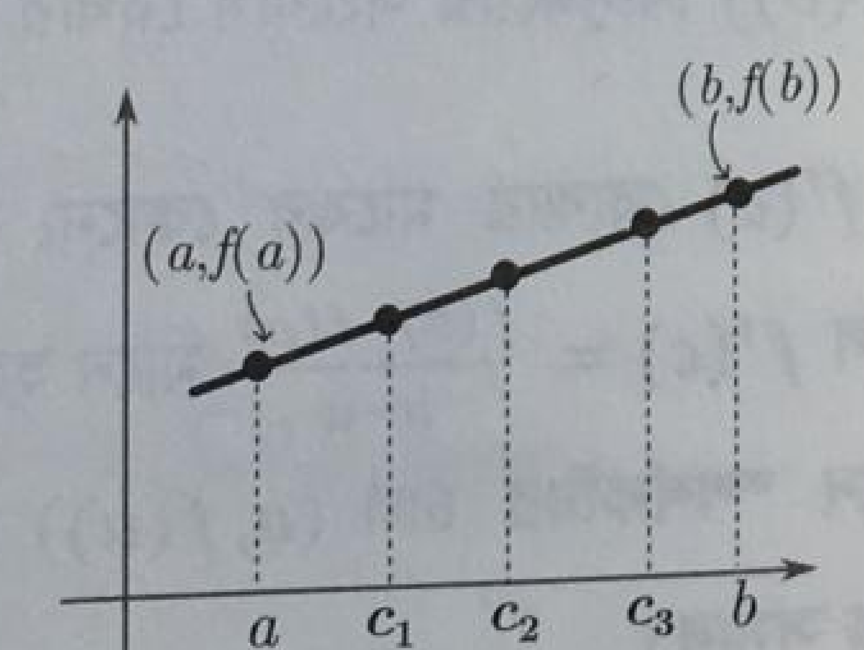
যদি আমরা বক্ররেখা নিয়ে ভাবি, আমরা দেখব অন্তত একটা বিন্দু আমরা পাচ্ছি যেখানে স্পর্শক হবে ছেদকের সমান্তরাল।





এটা বোঝার একটা সহজ বুদ্ধি আছে। ছেদক বরাবর একটা রুলার ধরো। তারপর সমান্তরালে সরিয়ে নিতে থাকো, একটা বিন্দু পেয়ে যাবেই যেখানে রুলারটা বক্ররেখাটাকে স্পর্শ করেছে। তুমি সমান্তরালে এগিয়েছ এবং স্পর্শ করেছ, তাহলে এই স্পর্শক হবে ছেদকের সমান্তরাল। যে বিন্দুতে স্পর্শ করেছ, তার ভুজ হবে c।





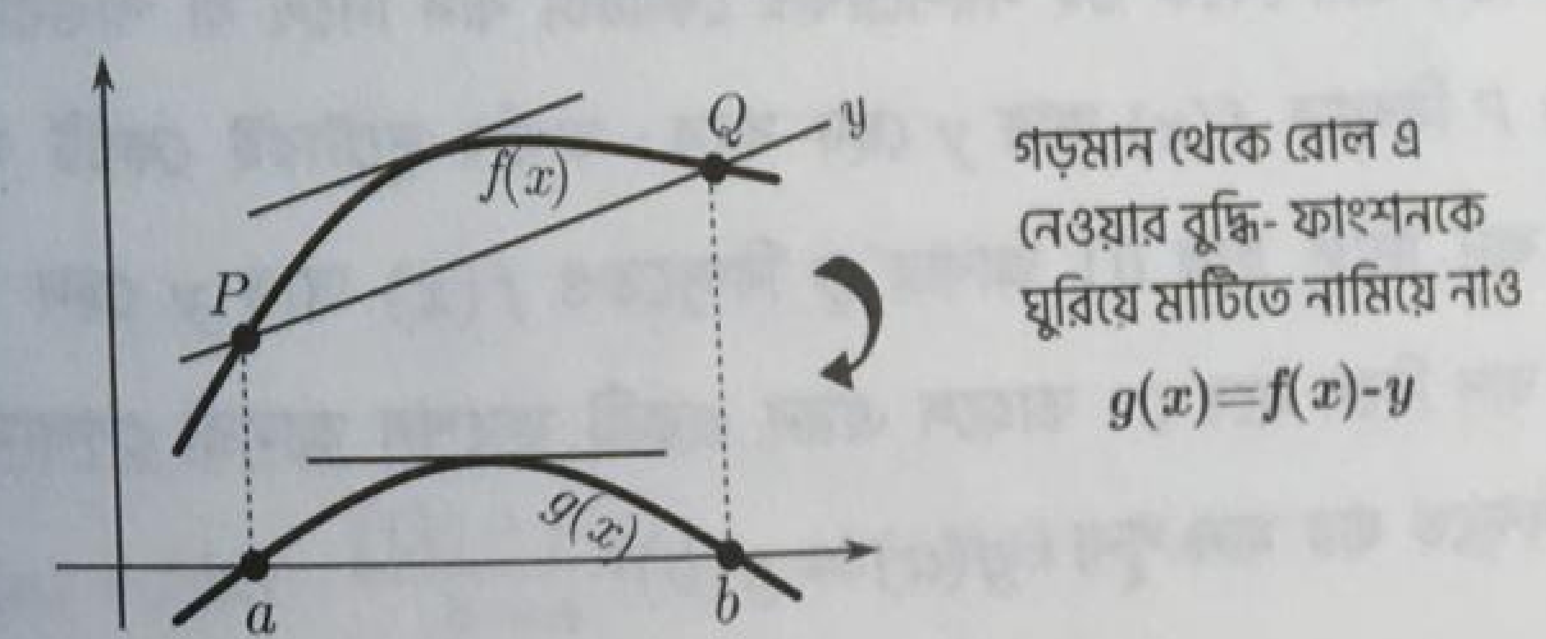
এই রকম c যে শুধু একটাই পাওয়া যাবে, এমন নয়। দেখো উপরে বামের ছবিতে তিনটা বিন্দু পাওয়া গেছে যেখানে স্পর্শকটা ছেদকের সমান্তরাল।

এছাড়া আরেকটা বিশেষ ঘটনা ঘটতে পারে। যদি ফাংশনটা সরলরেখা হয়, তাহলে প্রচুরসংখ্যক (গাণিতিকভাবে বললে অসীম সংখ্যক) c পাওয়া যাবে, কারণ সবজায়গাতেই ঢাল সমান। উপরে ডানের ছবিতে এমনটা দেখতে পাবে।

খেয়াল করো যদি $f(b) = f(a)$ হয়, তাহলে এটাই তোমাকে দেবে রোলের উপপাদ্য। মধ্যমান উপপাদ্যে আছে $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$। এখানে, $f(b) = f(a)$ হলে পাবে $f'(c) = 0$ । আমরা রোলের উপপাদ্যকে মধ্যমান উপপাদ্যের একটা বিশেষ ক্ষেত্র চিন্তা করতে পারি। আবার রোলের উপপাদ্যকে প্রামাণ্য ধরে নিয়ে সেটা থেকে মধ্যমান উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারি। তোমাদের মধ্যে যারা আরো কৌতূহলী, তারা বদ্ধ ব্যবধিতে কেন অবিচ্ছিন্ন বা খোলা ব্যবধিতে কেন অন্তরীকরণযোগ্য হতে হয় সেটা আগের মতো করে ভেবে নিতে পারো।

গড়মান উপপাদ্যের প্রমাণ:

সাধারণত রোলের উপপাদ্য থেকেই গড়মান উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়। বুদ্ধিটা দারুণ!



পুরো ফাংশনটাকে যদি আমরা এমনভাবে ঘুরিয়ে দিতে পারি যেন $P\,(a, f(a))$ আর $Q\,(b, f(b))$ -এর সংযোগরেখাটা X অক্ষের

সমান্তরাল হয়, তাহলে রোলের উপপাদ্য ব্যবহার করা যাবে! আমরা এমন একটা বুদ্ধি খাটাব যেন, পুরো ফাংশনটা নিচে নেমে আসে, যেন এদের সংযোগরেখাটা x অক্ষে মিশে যায়!

প্রমাণ: আগে দেখি $(a, f(a))$ আর $(b, f(b))$ বিন্দু দুটোর সংযোগরেখার সমীকরণ কী? এটা হলো—

$$\frac{y - f(a)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - a}{x - b}$$

বা, $$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

এটা হলো PQ সরলরেখাটার সমীকরণ। এখন এবারে আমরা একটা নতুন ফাংশন ভাবি $g(x)$, যেটা দেখতে এমন,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \end{aligned}$$

অর্থাৎ এই ফাংশনটা এমন ফাংশন যেখানে $f(x)$-এর প্রতিটা বিন্দুতে যে কোটি ছিল তার থেকে ওই সরলরেখার কোটিটা বাদ দিলে যা পাওয়া যাবে সেটা। P বিন্দুতে $f(x)$ আর y ছেদ করে। অর্থাৎ দুটোরই কোটি সমান, ফলে বাদ দিলে হবে 0। আবার Q বিন্দুতেও $f(x)$ আর y ছেদ করে, ফলে বাদ দিলে হবে 0। তাহলে এমন একটি ফাংশন আমরা পেলাম, a ও b বিন্দুতে যার মান শূন্য। $g(a) = g(b)$[1]

[1] $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - f(a)$

যেহেতু, $[a, b]$-তে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন এবং $[a, b]$-তে y-ও অবিচ্ছিন্ন, তাই এদের বিয়োগফল, $g(x)$ ও অবিচ্ছিন্ন হবে।

একইভাবে (a, b)-তে $g(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য। ব্যস! $g(x)$ ফাংশনটি রোলের উপপাদ্যের সবগুলো শর্ত সিদ্ধ করে। তাহলে আমরা রোলের উপপাদ্য ব্যবহার করতে পারি। অতএব (a, b) ব্যবধিতে একটা c থাকবে যেখানে,

$$g'(c) = 0$$

বা, $$f'(c) - y' = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} \because g(x) = f(x) - y \\ \therefore g'(x) = f'(x) - y' \end{array}\right]$$

বা, $$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \qquad \left[\because y' = y \text{ এর ঢাল } = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

বা, $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

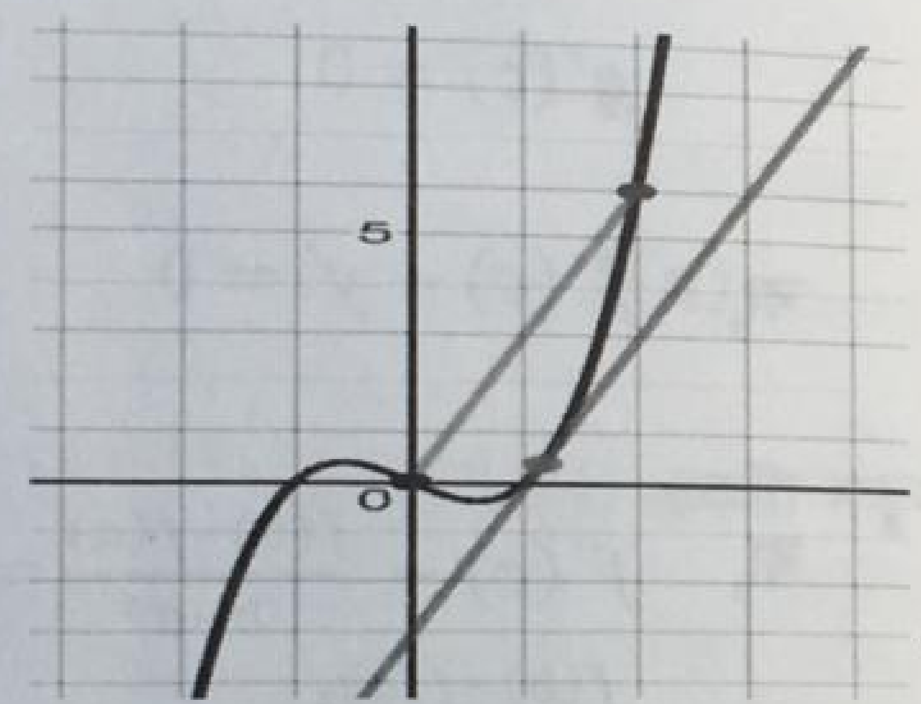
$$\therefore g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = f(a)$$

$$\begin{aligned} \therefore g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{aligned}$$

গড়মান উপপাদ্যের ব্যবহার:

উদাহরণ 10.3: দেখাও যে, $f(x) = x^3 - x$ ফাংশনে $(0,2)$ ব্যবধির জন্য গড়মান উপপাদ্যটি সত্য।

প্রমাণ: যেহেতু $f(x)$একটি বহুপদী ফাংশন, এটি সব জায়গায় অবিচ্ছিন্ন ও অন্তরীকরণযোগ্য। আমাদের দেখাতে হবে যে, $(0,2)$ ব্যবধিতে এমন একটি c রয়েছে যার জন্য $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



এখন,

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$\therefore f'(c) = 3c^2 - 1$$

তাহলে দেখাতে হবে $(0,2)$ ব্যবধিতে অন্তত একটি c আছে যার জন্য,

$$3c^2 - 1 = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$\text{বা,} \quad 3c^2 - 1 = \frac{(2^3-2)-f(0)}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

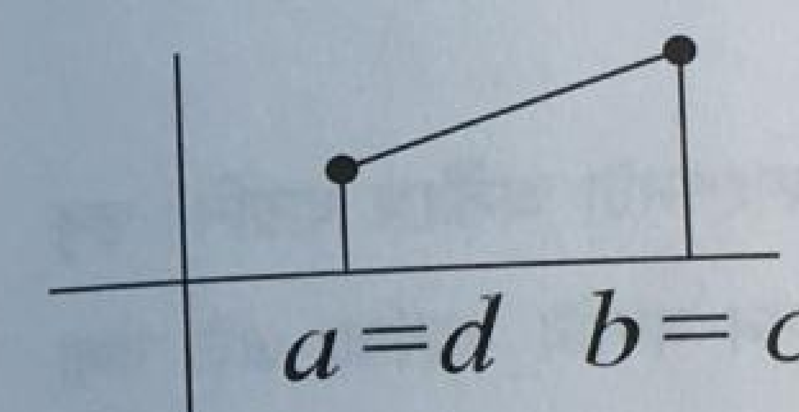
$$\text{বা,} \quad c^2 = \frac{4}{3}$$

আমরা দেখি এখানে, $\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15$ । এটি $(0,2)$ ব্যবধিতে অবস্থিত। ফলে গড়মান উপপাদ্য এখানে খাটে। ছবিতে আসল ব্যাপারটা দেখতে পাবে।

১০.8 চরমমান উপপাদ্য (EXTREMEVALUETHEOREM) :

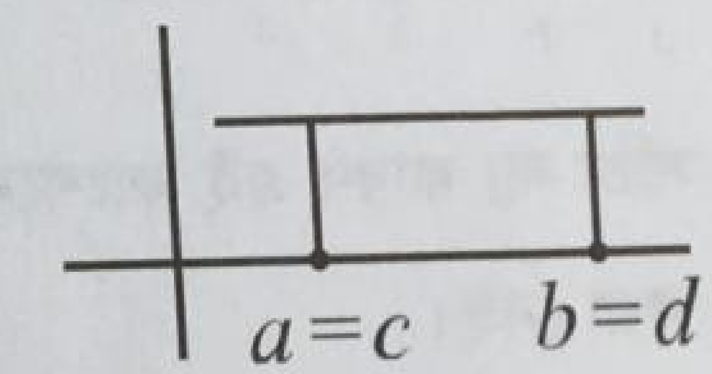
উপপাদ্য 10.4: কোনো ফাংশন f যদি $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $[a,b]$ ব্যবধির কোনো বিন্দু c তে ফাংশনটির একটি পরম সর্বোচ্চ মান, $f(c)$ এবং $[a,b]$ -এর মাঝে কোনো বিন্দু d-তে ফাংশনটির পরম সর্বনিম্ন মান, $f(d)$ পাওয়া যাবে।

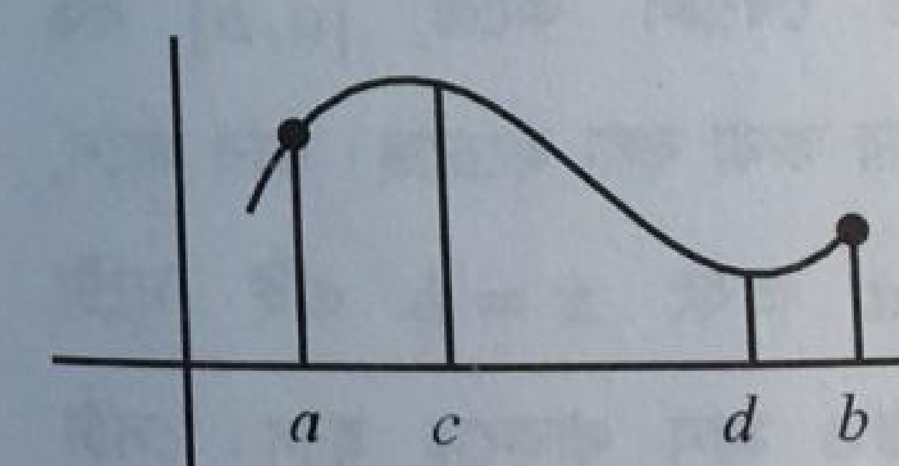
এটা তুমি যা ভাবছ তা-ই। কোথাও সবচেয়ে বড় মান থাকবে আর কোথাও সবচেয়ে ছোট।



ফাংশনটা যদি হয় এমন, তাহলে a বিন্দুতেই পাবে সর্বনিম্ন মান আর b বিন্দুতে পাবে সর্বোচ্চ মান।

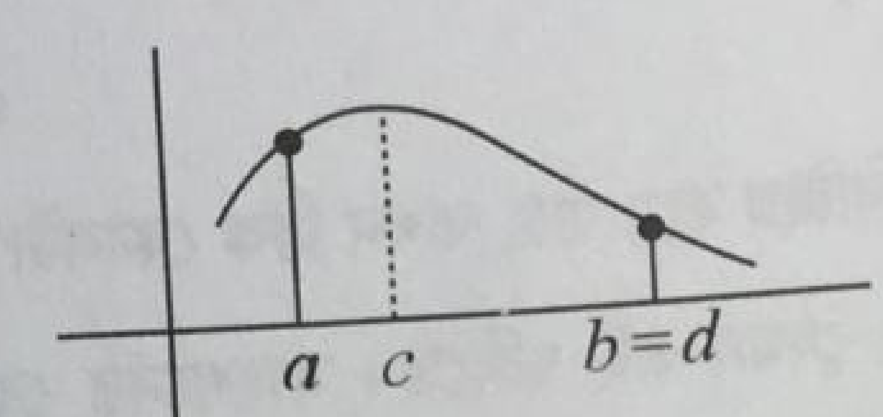
ফাংশনটা যদি হয় এমন, তখন সর্বোচ্চ আর সর্বনিম্ন একই মান। সবাই যেখানে সমান, সেখানে সর্বোচ্চ আর সর্বনিম্ন কী?





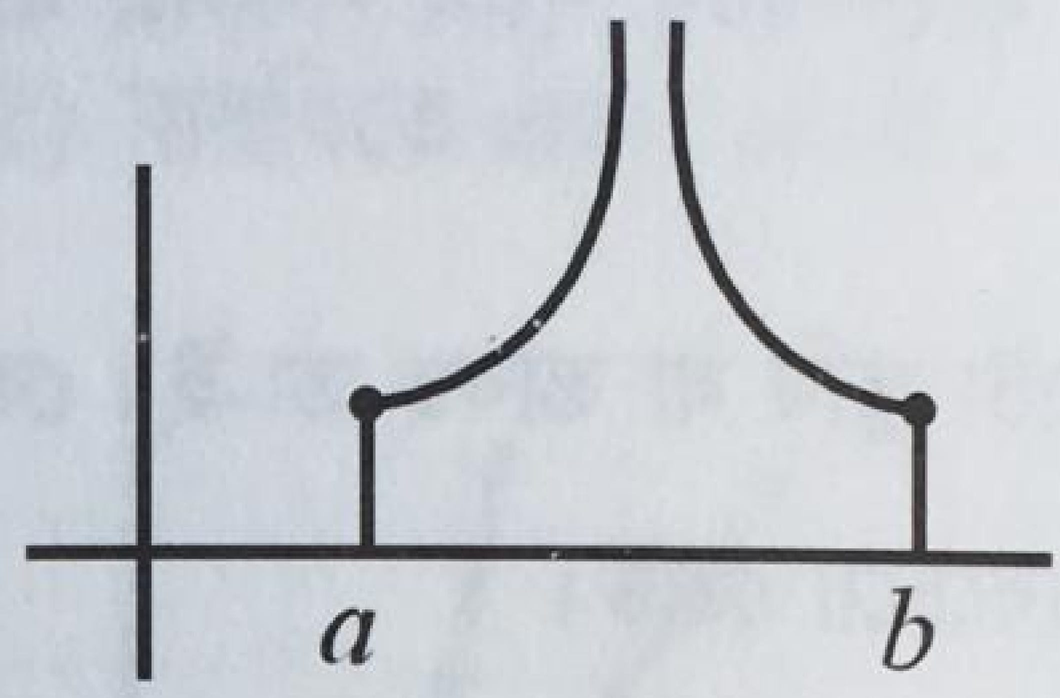
বামের ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ মান পাওয়া গেছে চূড়া বিন্দুতে আর সর্বনিম্ন ঢালু জায়গাটাতে।

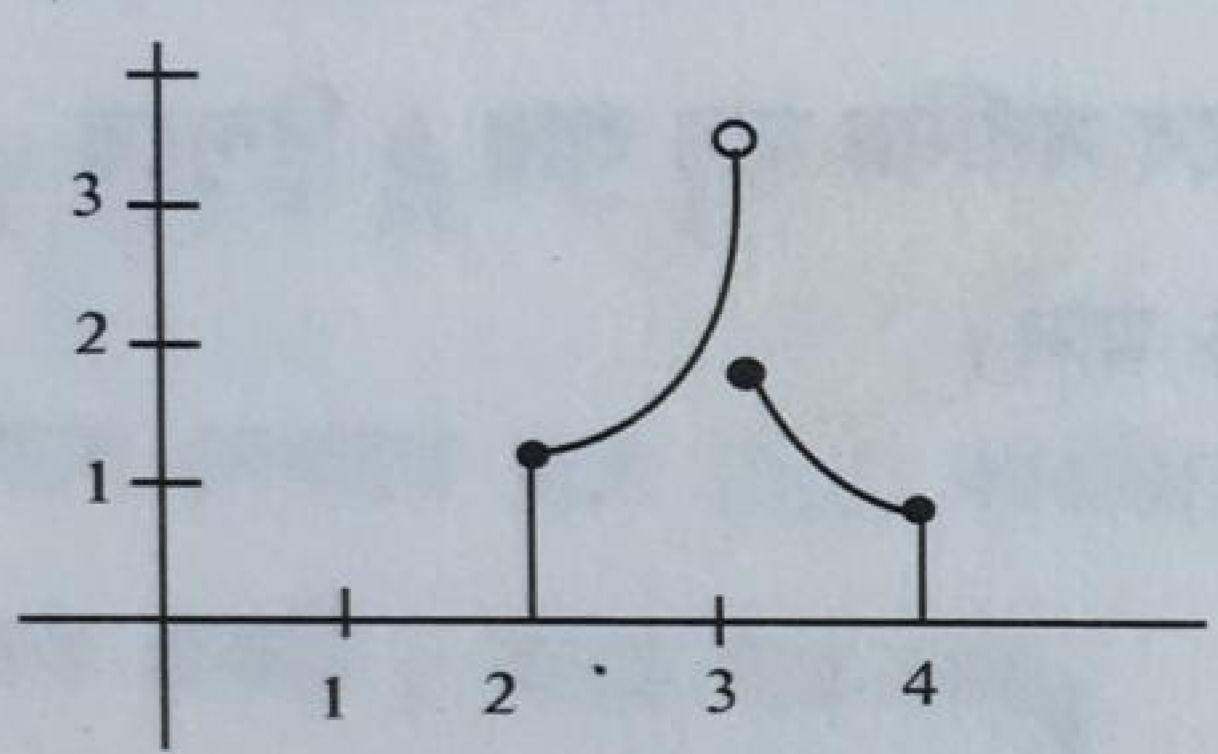
এমন ক্ষেত্রে a আর b-এর মাঝে c-তে হয়েছে সর্বোচ্চ। সর্বনিম্ন পাওয়া গেছে d-এ।



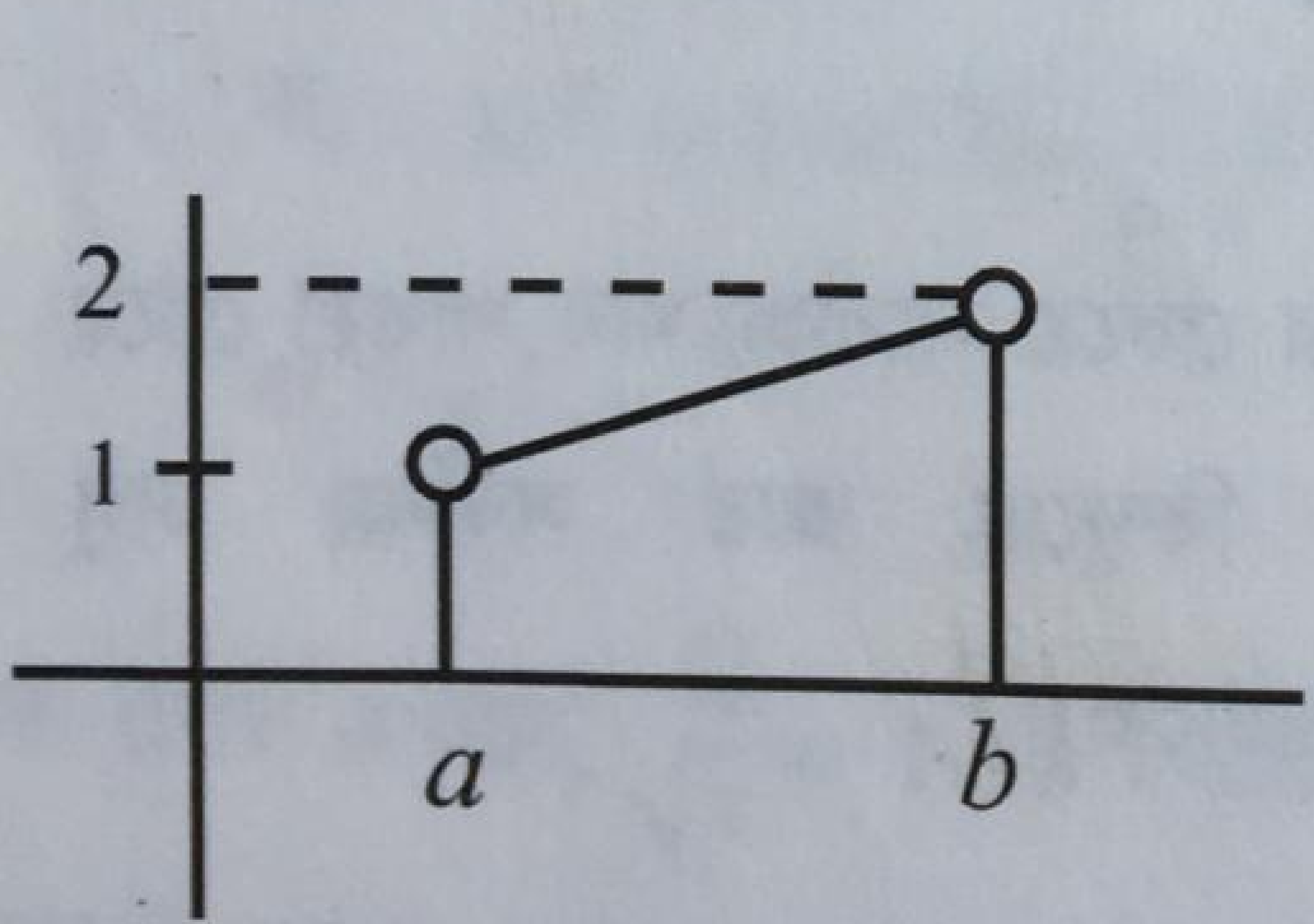
শর্তটার দিকে নজর দাও আরেকবার- আচ্ছা $[a,b]$ এই ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হওয়ার কথা কেন বলা হলো? না হলে কী হতো? চলো দেখি, তাহলে ধারণা করতে পারবে।

ধরো ফাংশনটা মাঝে কোথাও এমন অসীমের দিকে ধেয়ে যাচ্ছে। এমন হলে কোনো সসীম সর্বোচ্চ মান ভাবা যায় না। তুমি বলতে পারবে না, ঠিক কোন মানটা সর্বোচ্চ।





আবার এই ফাংশনটা অসীমে যায়নি। তবু ফাংশনের কোন মানটা সর্বোচ্চ এটা বলা যায় না। দেখে মনে হতে পারে f-এর মান 3 হলে বোধহয় সর্বোচ্চ হবে। আসলে সেটা সত্যি না! কারণ এই ফাংশনের মান কখনো 3 হয় না। দেখো গোল্লাটা ভরাট করা নেই।



আরও খেয়াল করো, $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধির কথা বলা হয়েছে। তার মানে, $x=a$ এবং $x=b$ এই দুটো বিন্দুতেও মান থাকতে হবে। সেটা কেন? যদি a ও b-তে ফাংশনটা অবিচ্ছিন্ন হয়ে যায়, তখন ঠিক কোনটা সর্বোচ্চ মান, সেটা সবসময় বলা যায় না। যেমন এই ছবিতে। ফাংশনের কোন মানটা সর্বোচ্চ? 2? উঁহু, না। 2 ফাংশনে নেই।

চমক হাসানের জন্ম ২৮ জুলাই, ১৯৮৬, কুষ্টিয়ায়। বাবা আহসানুল হক, মা নওরাজিস আরা জাহান। এইচএসসি পর্যন্ত লেখাপড়া কুষ্টিয়াতেই। বুয়েট থেকে তড়িৎকৌশলে স্নাতক এবং যুক্তরাষ্ট্রের ইউনিভার্সিটি অব সাউথ ক্যারোলাইনা থেকে পিএইচডি সম্পন্ন করেন। বর্তমানে গবেষণা ও উন্নয়ন প্রকৌশলী হিসেবে কর্মরত আছেন 'বোস্টন সায়েন্টিফিক করপোরেশন'-এ। স্ত্রী ফিরোজা বহ্নি এবং কন্যা বিনীতা বর্ণমালার সঙ্গে থাকেন ক্যালিফোর্নিয়ার সান্টা ক্লারিটা শহরে।

তার ভালো লাগে গাইতে, পড়তে, শিখতে, শেখাতে। চমক হাসান আশাবাদী মানুষ, স্বপ্ন দেখেন আলোকিত ভবিষ্যতের, যখন এ দেশের ছেলেমেয়েরা আনন্দ নিয়ে লেখাপড়া করবে, প্রশ্ন করতে ভয় পাবে না, মুখস্থ করে পাস করবে না। ওরা অনুভব করবে কেন, কীভাবে, কী হচ্ছে! গণিত অলিম্পিয়াড শুরুর সাথে সাথে এই আন্দোলনটাও শুরু হয়ে গেছে। তিনি সেই আন্দোলনের একজন কর্মী। গণিত অলিম্পিয়াডের একাডেমিক দলে প্রশিক্ষক, প্রশ্নপ্রণেতা ও পরীক্ষা নিয়ন্ত্রক হিসেবে কাজ করেছেন বেশ কিছুদিন। পাঠকের যেকোনো মন্তব্য তার কাছে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। মন্তব্য জানাতে পারেন ই-মেইলে কিংবা ফেসবুকে তার অফিশিয়াল পেজে।

প্রকাশিত গ্রন্থ

গল্পে-জল্পে জেনেটিক্স

গণিতের রঙ্গে : হাসিখুশি গণিত

অঙ্ক ভাইয়া

ই-মেইল : chondrochari@gmail.com

ফেসবুক পেজ :

www.facebook.com/chamok.hasan

প্রচ্ছদ : চমক হাসান

~ গণিত ~

$x = 16\sin^3 t$

$\int dx$

$x = 16\sin^3 t$

$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$

$\frac{d}{dx}\sin x$

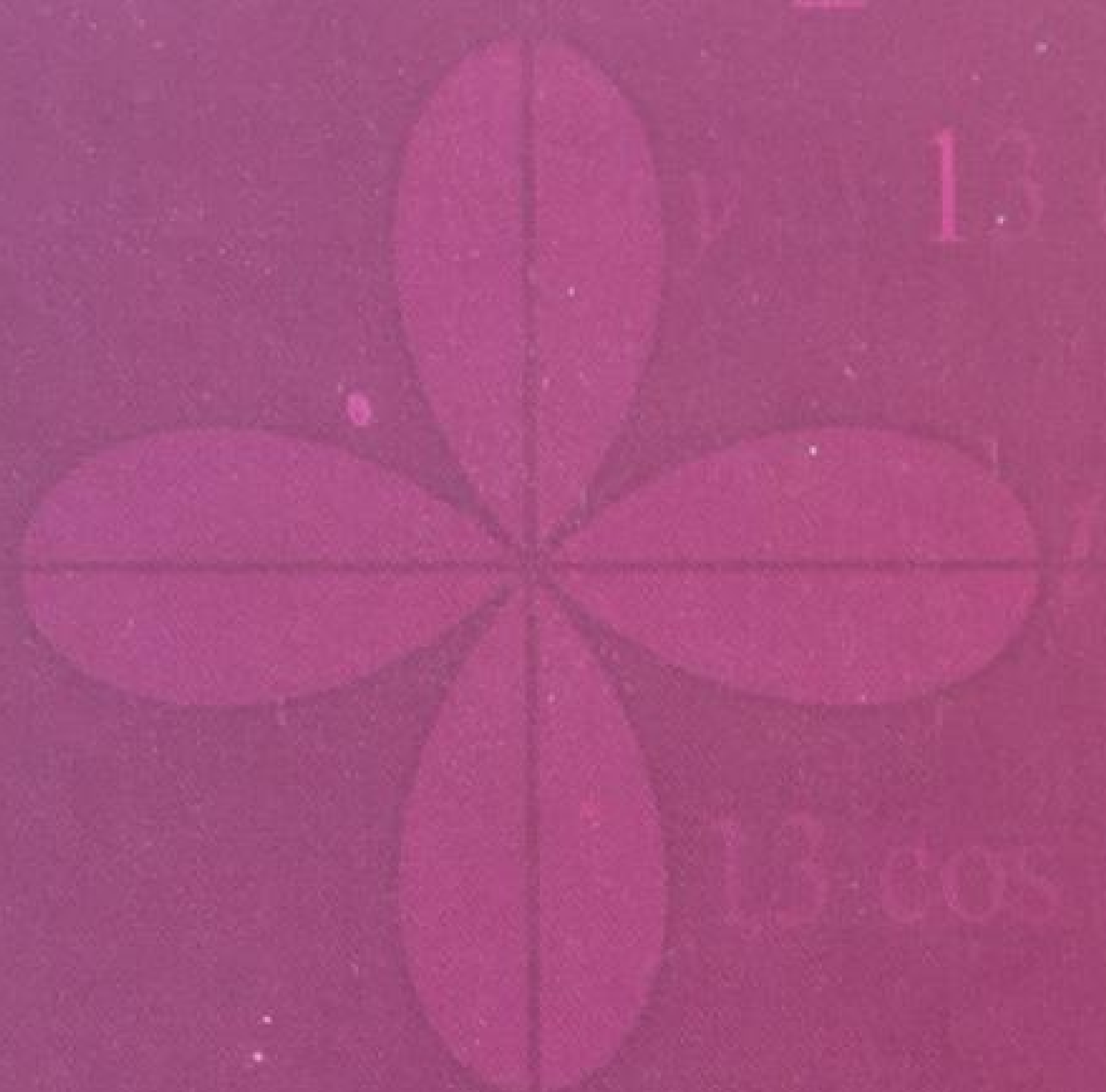
$13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$

ISBN 978-984-8040-29-4

9 789848 040294

ADARSHA
Phone: +88-02-9612877, +880-1793296202
Email: info@adarshapublications.com
Web: www.adarshapublications.com

$x = 16\sin^3 t$



$x = 16\sin^3 t$

$y = 13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$

$\dfrac{d}{dx}\sin x$

$13\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t$

ISBN 978-984-8040-29-4

9 789848 040294

ADARSHA

Phone: +88-02-9612877, +880-1793296202

Email: info@adarshapublications.com

Web: www.adarshapublications.com